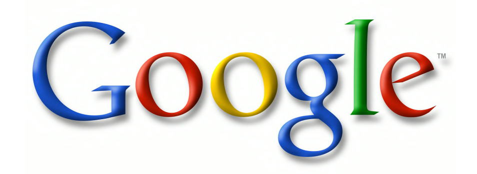

Google


Hosted by Google

Sechs Abhandlungen

über

das Rechnen mit Spiegelungen,

nebst Anwendungen

auf die Geometrie der Bewegungen und auf die projektive Geometrie,

von

Dr. Hermann Wiener,
Privatdocenten an der Universität zu Halle a. S.

Abdrücke aus den Berichten der math.-phys. Klasse der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften.

1890, 1891 und 1893.

Leipzig,
Druck von Breitkopf & Härtel
1893.



(Abdruck aus den Berichten der math.-phys. Classe der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften 1890.)

SITZUNG VOM 13. JANUAR 1890.

Hermann Wiener, *Die Zusammensetzung zweier endlichen Schraubungen zu einer einzigen.* Vorgelegt von Neumann. Mit vier Figuren.

1. Die Lehre von der Bewegung starrer Systeme stützt sich wesentlich auf den Satz, dass ein System von starr verbundenen Punkten aus irgend einer Lage in jede beliebige andere durch eine Schraubung[1]) gebracht werden kann, woraus erhellt, dass es möglich ist, jede beliebige Bewegung ihrem Erfolg nach durch eine bestimmte Schraubung zu ersetzen. Sind *zwei* Bewegungen gegeben, so bildet ihre Folge wieder eine einzige, und es besteht demnach eine Grundaufgabe darin, zwei Schraubungen zu einer einzigen neuen zusammenzusetzen. Handelt es sich dabei um *unendlich kleine* Bewegungen, so löst man die Aufgabe ohne Schwierigkeit, indem man jede Schraubung in eine Schiebung und in eine Drehung zerlegt denkt, und die unendlich kleinen Schiebungen und die unendlich kleinen Drehungen, jede für sich, wie Strecken zusammensetzt.

Im Folgenden will ich nun zeigen, dass man mit derselben Leichtigkeit auch *endliche Schraubungen* zusammensetzen kann. Und zwar wird die Methode in einer Verallgemeinerung derjenigen bestehen, deren man sich zur Zusammensetzung der Strecken bedient. Wie jede Strecke durch zwei Elemente, den Anfangspunkt und den Endpunkt, bestimmt ist, so wird es auch gelingen für jede Schraubung zwei solche Elemente zu finden und zwar in zwei sich kreuzenden Geraden.

---

1) Die kurzen Worte »Schiebung, Drehung, Schraubung«, statt Parallelverschiebung (Translation), Rotation, Schraubenbewegung, entnehme ich Sohncke's »Theorie der Krystallstructur«, ebenso das Wort »Umwendung« statt »halbe Umdrehung« dem »Lehrbuch der Elementargeometrie« von Henrici und Treutlein.



Die *allgemeine Lösung* der Aufgabe hat naturgemäss den Erfolg, dass damit auch alle *besonderen Fälle* erledigt sind. Waren also die Methoden, die man bisher zur Lösung der einfacheren Aufgaben verwenden musste, mancherlei, so führt jetzt *ein* Weg stets zum Ziele. Da derselbe die geometrische Anschaulichkeit mit der Kürze der Rechnung verbindet, so gebe ich mich der Hoffnung hin, dass dadurch auch die Einführung in das Studium der Kinematik nicht unwesentlich erleichtert werde.

I. Die Umwendung als elementare Bewegung.

2. Als elementare Bewegung hat man bisher die Schiebung und die Drehung betrachtet, da, wie erwähnt, jede beliebige Bewegung als Folge dieser beiden angesehen werden kann[1]. Wir fassen diese schon als zusammengesetzt auf und führen eine *einheitliche* elementare Bewegung ein, durch welche dasselbe erreicht wird, nämlich die *Umwendung* d. i. die halbe Umdrehung um eine Axe. Wir werden im folgenden Abschnitt sehen, dass sowohl jede Schiebung und Drehung, wie auch jede Schraubung als die Folge zweier Umwendungen um bestimmte Geraden als Axen dargestellt werden kann. Hier seien nur die wichtigsten Eigenschaften unserer neuen elementaren Bewegung angeführt.

3. *Mit jeder Geraden des Raumes ist eine elementare Bewegung eindeutig verknüpft.* Denn sind s, t, u ... beliebige Geraden, so ist um jede derselben nur eine einzige solche elementare Bewegung möglich, wie auch umgekehrt zu jeder Umwendung eine ganz bestimmte Gerade als Axe gehört. Es führt dies zu einer einfachen Schreibweise dieser Operation, indem wir unter

$$\{s\}, \{t\}, \{u\}, \cdots$$

die Umwendung bezw. um die Gerade

$$s, t, u, \cdots$$

verstehen. Dabei fassen wir die Geraden stets als *fest im Raume liegend auf*, ganz unabhängig davon, welchen Bewegungen sonstige Punkte des Raumes unterworfen sein mögen.

---

1) Von diesem Satze werde ich in einer Fortsetzung des vorliegenden Aufsatzes einen auf denselben Grundlagen beruhenden einfachen Beweis geben, sowie eine damit zusammenhängende kurze Lösung der Aufgabe, die Schraubung zu finden, welche ein starres Dreieck aus einer Lage in eine beliebige andere bringt.

Gelangen die Punkte eines starren Systems aus den Anfangslagen $A_1, B_1, C_1, \ldots$ durch eine Umwendung um s in die Endlagen $A_2, B_2, C_2, \cdots$, so schreiben wir dies:

$$A_1\ B_1\ C_1 \cdots \{s\}\ A_2\ B_2\ C_2 \cdots$$

Wird das System ebenso nach einander den Operationen $\{s\}$, dann $\{t\}$ unterworfen, so dass:

$$A_1\ B_1\ C_1 \cdots \{s\}\ A_2\ B_2\ C_2 \cdots \{t\}\ A_3\ B_3\ C_3 \cdots ,$$

so bezeichnen wir das als die Folge $\{s, t\}$ der Operationen $\{s\}$ und $\{t\}$ und schreiben

$$A_1\ B_1\ C_1 \cdots \{s, t\}\ A_3\ B_3\ C_3 \cdots ,$$

und analog für die Folge von beliebig vielen solchen Operationen. Wegen der Starre des Systems folgen aus dieser Formel Beziehungen zwischen den Entfernungen, Winkeln, Dreiecken u. s. w. So

$$A_1 B_1 = A_3 B_3 \, , \quad \sphericalangle A_1 B_1 C_1 = A_3 B_3 C_3 \, , \quad \triangle A_1 B_1 C_1 \cong A_3 B_3 C_3$$

u. s. f.[1])

4. Die wichtigste Eigenschaft dieser elementaren Bewegung ist die, dass sie eine *involutorische* ist, *d. h. eine solche, deren einmalige Wiederholung ihren Erfolg aufhebt.* Denn erleidet ein System von Punkten eine Umwendung um s, und dann noch eine solche, so hat jeder Punkt eine ganze Umdrehung um s gemacht und ist also in seine Ausgangslage zurückgekehrt. Eine Operation, die keine Wirkung auf das von ihr betroffene Object ausübt, nennt man die *identische* und belegt sie mit dem Zeichen 1, so dass wir, wenn s eine ganz beliebige Gerade ist, stets schreiben können:

$$\{s, s\} = 1 \; .$$

5. Die geometrische Bedingung dafür, dass bei der Umwendung um s die beiden Stellen A_1 und A_2 des Raumes Anfangs- und Endlage eines Punktes sind, besteht darin dass s die mittelsenkrechte Gerade von $A_1 A_2$ ist.

---

1) Die Zeichen $\{s\}$, $\{s, t\}$, $\cdot\cdot$ werden also genau so gebraucht, wie das Zeichen $\cong$ bei Dreiecken, $\overline{\wedge}$ in der projectiven Geometrie u. a.; MÖBIUS gebraucht in einer etwas allgemeineren Bedeutung das Zeichen $=$ für congruente und symmetrisch gleiche Systeme, und liest aus derartigen Gleichungen die obigen Beziehungen ab.



Anmerkung. Man kann dann auch sagen, jeder Punkt gehe aus seiner Anfangslage *durch Spiegelung an der Geraden*[1]) s in seine Endlage über, und auch, es sei an s das ganze starre System aus jener Lage in diese gespiegelt worden. Dadurch ist die Stellung ausgedrückt, welche die hier folgenden Betrachtungen in einer allgemeineren Theorie einnehmen, nämlich in der Geometrie der Spiegelungen[2]). Die Spiegelungen eines räumlichen Systems an einer Ebene und an einem Punkte haben für die Mechanik keine unmittelbare Bedeutung, weil durch sie das System nicht in ein congruentes, sondern in ein symmetrisches übergeführt wird. Und doch ist auch diese Erweiterung nicht ohne Anwendung auf Verhältnisse, die in der Natur vorkommen; die neueren Untersuchungen über die Krystallstructur zeigen die Nothwendigkeit, auch *symmetrische Systeme* mit in Betracht zu ziehen.

II. Die Folge zweier Umwendungen.

6. Im Folgenden soll nun der Hauptsatz unserer Theorie abgeleitet werden, dass jede Schraubung dasselbe leistet, wie die Umwendungen um zwei bestimmte Geraden. Wie aber eine durch Anfangs- und Endpunkt gegebene Strecke durch eine andere, ihr gleiche, ersetzt werden kann, von welcher der eine dieser beiden Punkte beliebig gewählt werden darf, so kann auch von den beiden Geraden, um welche, zur Erzielung des Erfolges einer gegebenen Schraubung, nach einander umgewandt werden muss, die eine nach gewissen Willkürlichkeiten angenommen werden, während die Lage der anderen daraus folgt. Es ergibt sich hier also die wichtige Frage nach der *Ersetzbarkeit* (Aequivalenz) der Umwendungen um zwei Geraden durch diejenigen um zwei andere, d. i. die Frage, wann rufen zwei Geraden s, t dieselbe Lagenveränderung eines Systems, hervor, wie zwei andere Geraden s', t'? Formal drücken wir die Ersetzbarkeit zweier Bewegungen durch das Gleichheitszeichen aus, schreiben also:

$$\{s, t\} = \{s', t'\} .$$

7. Um zu zeigen, dass eine Bewegung denselben Erfolg hat,

---

1) Der Begriff »Spiegelung an einer Geraden« gestattet nicht nur eine leichtere Ausdrucksweise, sondern ist, wie ich meine, auch anschaulicher als der der Umwendung. Doch glaubte ich auf diese Vortheile verzichten zu müssen, um selbst den Schein eines der Mechanik fremden Begriffs zu vermeiden.

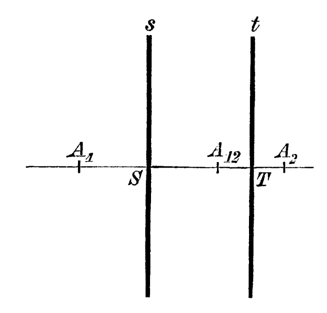
2) Die Grundlagen der allgemeinen geometrischen Theorie der Spiegelungen werde ich demnächst in einer grösseren Arbeit auseinandersetzen.

wie eine zweite, haben wir stets nur nachzuweisen, dass die drei Eckpunkte eines Dreiecks durch beide Bewegungen aus ihrer Anfangslage in dieselbe Endlage übergeführt werden. Denn in der Kinematik starrer Systeme gilt der

Grundsatz. *Die Lage eines Systems starr verbundener Punkte im Raume ist vollkommen bestimmt, wenn die Lage der drei Eckpunkte eines dem System angehörenden Dreiecks bekannt ist.*

8. Wir untersuchen zuerst, was geschieht mit einem System, welches den Umwendungen *um zwei parallele Geraden s* und *t* unterworfen ist, d. h. was bedeutet die Operation

$$\{s, t\} \quad \text{wenn} \quad s \parallel t \; ?$$



Ein Punkt, der vor der Bewegung in der Ebene der beiden Geraden in A_1 liegt, gelangt durch die erste Umwendung (um s) in die Lage A_{12}, und von da durch die zweite Umwendung (um t) nach A_2. Dabei liegen, wie A_1, auch A_{12} und A_2 in der Ebene der beiden Geraden, und weil die aus A_1 auf s errichtete Senkrechte auch auf t senkrecht steht, alle drei in einer Geraden, welche von s und t in S und T geschnitten werden möge.

Dann gilt die Streckengleichung (wie auch A_1 in der Ebene liegen mag):

$$\overline{A_1 A_2} = \overline{A_1 S} + \overline{S A_{12}} + \overline{A_{12} T} + \overline{T A_2} \; .$$

Da aber

$$\overline{A_1 S} = \overline{S A_{12}} \; ; \; \overline{A_{12} T} = \overline{T A_2}$$

(nach 5) so wird

$$\overline{A_1 A_2} = 2\,\overline{S A_{12}} + 2\,\overline{A_{12} T} = 2\,\overline{S T} \; .$$

Da die Strecke $\overline{ST}$ der Abstand der Geraden s und t ist[1]), so erfährt jener Punkt eine Schiebung um den doppelten Abstand dieser Geraden, und dasselbe geschieht auch mit jedem anderen Punkt der Ebene.

---

1) Als den *Abstand* zweier Elemente s, t bezeichne ich stets eine (nach Grösse, Richtung und Sinn bestimmte) *Strecke*, die vom ersten Element s nach dem zweiten t hin gerichtet ist.

Denken wir uns nun ein Dreieck der Ebene von s, t, das die Anfangslage $A_1 B_1 C_1$ hat, in dem bewegten starren System enthalten, so geht dasselbe sowohl durch die Schiebung um $2\overline{ST}$, wie auch durch $\{s, t\}$ in die Endlage $A_2 B_2 C_2$ über, und demnach (7.) ist die erste dieser Bewegungen durch die andere ersetzbar. Dies giebt den

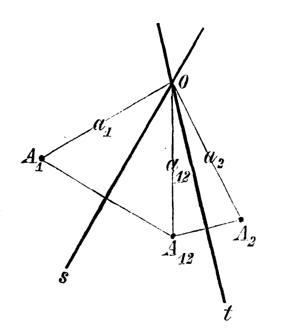
Satz. *Die Folge der Umwendungen um zwei parallele Geraden ist ersetzbar durch eine Schiebung um ihren doppelten Abstand.*

Umkehrung. *Jede Schiebung eines Systems starr verbundener Punkte ist ersetzbar durch Umwendungen um zwei Geraden, von welchen die eine senkrecht zur Schiebungsrichtung, sonst aber beliebig, angenommen werden darf.*

Denn dann kann man eine andere zu jener parallele Gerade so annehmen, dass ihr Abstand der halben Strecke, um welche verschoben wird, gleich ist. Die durch sie erzeugte Bewegung ist dann nach dem »Satze« durch die Schiebung ersetzbar.

Zusatz. *Die Umwendungen um zwei parallele Geraden s, t sind durch diejenigen um zwei andere Geraden s′, t′ ersetzbar, wenn diese ebenfalls parallel sind, und ihr Abstand*[1]) *dem der ersten gleich ist.*

9. Wir gehen zu dem Falle über, dass *die beiden Geraden s und t sich schneiden*, etwa im Punkte O. Ein Punkt, der vor der Bewegung in der Ebene der beiden Geraden in A_1 liegt, gelangt durch die erste Umwendung (um s) in die Lage A_{12} und von da durch die zweite Umwendung (um t) nach A_2, und es liegen auch A_{12} und A_2 in jener Ebene. Da O bei jeder dieser Bewegungen an seiner Stelle bleibt, so ist:



$$O A_1 \{s\}\, O A_{12} \{t\}\, O A_2\ ,$$

also

$$O A_1 = O A_{12} = O A_2$$

d. h. A_1 und A_2 liegen auf demselben Kreise mit dem Mittelpunkt O.

Ferner gilt, wie auch A_1 in seiner Ebene gelegen sein mag, die Winkelgleichung (wenn $O A_1 = a$, $O A_{12} = a_{12}$, $O A_2 = a_2$ gesetzt ist):

1) Vergleiche die vorige Fussnote.

$$\sphericalangle(a_1 a_2) = (a_1 s) + (s a_{12}) + (a_{12} t) + (t a_2)$$

(abgesehen von Vielfachen einer vollen Umdrehung), und da

$$\sphericalangle(a_1 s) = (s a_{12}) \; ; \quad \sphericalangle(a_{12} t) = (t a_2) \; ,$$

so wird:

$$\sphericalangle(a_1 a_2) = 2(s a_{12}) + 2(a_{12} t) = 2(s t) \; .$$

Daraus folgt, dass jeder Punkt der Ebene durch $\{s, t\}$ eine Drehung um den Punkt O um den Winkel $2(st)$ erfährt, oder was dasselbe heisst, eine Drehung um eine in O auf der Ebene errichtete senkrechte Axe um diesen Winkel. Denken wir uns also ein in jener Ebene gelegenes Dreieck in dem starren System enthalten, so wird dasselbe sowohl durch die Bewegung $\{s, t\}$, wie auch durch die Drehung um jene Axe in die gleiche Endlage gebracht, und wir haben daher (nach 7.) den

Satz. *Die Folge der Umwendungen um zwei sich schneidende Geraden lässt sich ersetzen durch eine Drehung um ihren doppelten Winkel um eine in ihrem Schnittpunkt auf ihrer Ebene senkrecht stehende Axe.*

Umkehrung. *Jede Drehung um eine Axe kann durch Umwendungen um zwei Geraden s, t ersetzt werden, von welchen die eine, jene Axe senkrecht schneidend, sonst aber beliebig, angenommen werden darf.*

Denn nimmt man die andere so an, dass sie die Axe in demselben Punkt senkrecht trifft, und dass der Winkel (st) gleich dem halben Drehwinkel ist, so ist nach dem »Satze« die Bewegung $\{s, t\}$ durch jene Drehung ersetzbar.

Zusatz I. *Die Umwendungen um zwei sich schneidende Geraden s, t sind durch diejenigen um zwei andere sich schneidende Geraden s', t' ersetzbar, wenn alle vier eine Gerade senkrecht treffen, und $\sphericalangle(st) = (s't')$ ist.*

Denn dann ist nach dem »Satze« $\{s, t\}$ und $\{s', t'\}$ durch dieselbe Drehung ersetzbar.

Zusatz II. *Die Umwendungen um zwei einander senkrecht schneidende Geraden sind durch eine einzige zu ersetzen um eine Gerade, welche jene beiden senkrecht trifft.*

Denn nach dem »Satze« beträgt der Drehwinkel zwei Rechte.

Sind also s, t, u drei einander senkrecht treffende Geraden, so ist

$$\{s, t\} = \{u\} \; .$$



2*

Fügt man dieser Bewegung noch eine Umwendung um u hinzu, so wird:

$$\{s, t, u\} = \{u, u\} = 1 ,$$

d. h.:

Die Umwendungen um drei einander senkrecht schneidende Geraden führen ein System in seine Ausgangslage zurück.

10. Es seien endlich s und t *zwei sich kreuzende Geraden.* Wir suchen dann ihren Abstand, er sei die Strecke $\overline{ST}$, während mit p die Gerade desselben bezeichnet sei. Legen wir nun

durch S die Gerade $t' \parallel t$,

durch T die Gerade $s' \parallel s$,

so wird

$$\{s, t\} = \{s, s', s', t\} = \{(s, s'), (s', t)\}$$

und auch

$$\{s, t\} = \{s, t', t', t\} = \{(s, t'), (t', t)\} ,$$

da ja

$$\{s', s'\} = 1$$

und $\{t', t'\} = 1$ ist.

$\{s, s'\} = \{t', t\}$ bedeutet eine Schiebung um die Strecke $2\overline{ST}$,
$\{s', t\} = \{s, t'\}$ eine Drehung um die Axe p um den Winkel

$$2(s't) = 2(st') = 2(st) ;$$

$\{s, t\}$ bedeutet also eine Schiebung um die Strecke $2\overline{ST}$, verbunden mit einer Drehung um den Winkel $2(st)$, oder was dasselbe ist, die umgekehrte Folge dieser beiden Bewegungen, d. i. eine Schraubung um die Axe p, deren Höhe $2\overline{ST}$ und deren Winkel $2(st)$ beträgt.

Satz. *Die Folge der Umwendungen um zwei sich kreuzende Geraden ist ersetzbar durch eine Schraubung, deren Winkel dem doppelten Winkel, und deren Höhe dem doppelten Abstand der beiden Geraden gleich ist, während die Schraubenaxe mit der Linie dieses Abstandes zusammenfällt.*

Umkehrung. *Jede Schraubung kann durch die Umwendungen um zwei Geraden s, t ersetzt werden, von denen die eine, die Schraubenaxe senkrecht schneidend, sonst aber beliebig angenommen werden darf.*

Denn nimmt man dann die andere Gerade so an, dass sie die Schraubenaxe ebenfalls senkrecht trifft, und dass der Abstand der beiden Geraden gleich der halben Schraubungshöhe, ihr

Winkel gleich dem halben Schraubungswinkel ist, so ist nach dem »Satze« $\{s, t\}$ durch die Schraubung ersetzbar.

Zusatz. *Die Umwendungen um zwei sich kreuzende Geraden s, t sind durch diejenigen um zwei andere Geraden s', t' ersetzbar, wenn alle vier dieselbe Gerade senkrecht treffen, und wenn der Abstand und der Winkel von s und t gleich denen von s' und t' ist.*

Denn nach dem »Satze« ist dann $\{s, t\}$, und $\{s', t'\}$ durch dieselbe Schraubung ersetzbar.

Einen *besonderen Fall* bekommen wir hier wieder, wenn dieser Winkel ein rechter ist, der Winkel der Schraubung also zwei Rechte. Wir nennen dann die Bewegung eine *halbe Umschraubung.*

Auch die früheren Elementarbewegungen *Schiebung* und *Drehung* können als besondere Fälle der Schraubung betrachtet werden, sofern entweder der Schraubungswinkel, oder die Schraubungshöhe Null wird.

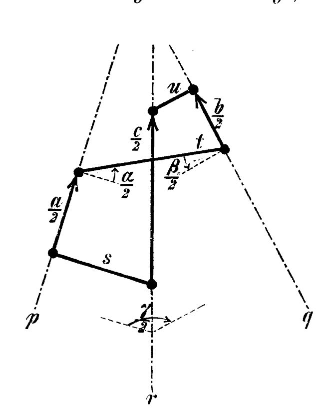
III. Die Zusammensetzung zweier Schraubungen.

11. Die Zusammensetzung zweier Strecken a und b geschieht so, dass man irgend einen Punkt des Raumes — er heisse T — wählt, und ihn zum Endpunkt und zum Anfangspunkt je einer Strecke macht, von denen die erste gleich a, die zweite gleich b ist. Dann setzt man die Strecken $\overline{ST}$ und $\overline{TU}$ einfach zusammen, indem man den gemeinsam vorkommenden Punkt T weglässt, und S als Anfangspunkt, T als Endpunkt einer neuen Strecke $\overline{ST}$ betrachtet, welche die gesuchte ist.

Ganz analog verfahren wir bei der Zusammensetzung zweier Schraubungen. Es giebt stets eine Gerade — sie heisse t — welche gleichzeitig zur Darstellung zweier gegebenen Schraubungen benutzt werden kann, es ist das diejenige (10. Umkehrung), welche die beiden Schraubenaxen gleichzeitig senkrecht trifft. (Artet die eine Schraubung zur Schiebung aus, so giebt es sogar unendlich viele, von denen irgend eine t sei.) Diese Gerade t wählen wir als *zweite* des Geradenpaares, welches die erste Schraubung ersetzt, und als *erste* desjenigen das die zweite ersetzt, so dass die erste durch $\{s, t\}$, die zweite durch $\{t, u\}$ ausgedrückt werden kann, wo s und u eindeutig bestimmte Geraden sind (10. Umkehrung). Statt die Folge der

beiden Schraubungen auszuführen, kann man also erst eine Umwendung um s und eine zweite um t, hierauf wieder eine Umwendung um t und eine weitere um u ausführen. Da aber eine zweimal hinter einander erfolgte Umwendung um t keine Lagenveränderung hervorbringt, so ist durch $\{s,u\}$ eine Schraubung bestimmt, welche die Folge der beiden gegebenen ersetzt. D. h.

Aufgabe. *Es seien zwei Schraubungen durch Axe, Höhe*[1] *und Winkel, p, a, α bezw. q, b, β gegeben, es sind diese Stücke r, c, γ für diejenige Schraubung zu suchen, welche dieselbe Lagenveränderung hervorbringt, wie die Folge der gegebenen.*



Lösung. Man bestimme die Gerade t, welche zugleich p und q senkrecht schneidet, lege dann eine Gerade s so, dass sie p senkrecht trifft, und dass Abstand und Winkel der beiden Geraden s und t gleich $\frac{1}{2}a$ und $\frac{1}{2}\alpha$ ist, ebenso die Gerade u so, dass sie q senkrecht trifft, und dass Abstand und Winkel der Geraden t und u gleich $\frac{1}{2}b$ und $\frac{1}{2}\beta$ ist.

Dann ist die Gerade r, welche s und u senkrecht trifft, die gesuchte Schraubenaxe; Abstand und Winkel der Geraden s und u sind die halbe Höhe und der halbe Winkel der gesuchten Schraubung, $\frac{1}{2}c$ und $\frac{1}{2}\gamma$.

Beweis. Nach 10. Umkehrung ist die erste Schraubung durch $\{s, t\}$, die zweite durch $\{t, u\}$ zu ersetzen, ihre Folge also durch

$$\{s, t, t, u\} = \{s, u\}$$

(nach 4.).

Zusatz I. *Die halbe gesuchte Schraubungshöhe ist gleich der Projection der Streckensumme, gebildet aus den halben gegebenen Schraubungshöhen und dem kürzesten Abstand der ersten gegebenen Schraubenaxe von der zweiten, auf die gesuchte Schraubenaxe.*

Denn diese Streckensumme ist gleich der Strecke, die ihren

---

1) Die Höhen a, b, c sind Strecken von bestimmtem Sinn, wie auch den Winkeln α, β, γ ein Sinn zukommt, der stets von der ersten Geraden nach der zweiten geht.

Anfangspunkt im Schnittpunkt von s und p, ihren Endpunkt im Schnittpunkt von q und u hat. Und da jener Punkt durch s, dieser durch u auf r projicirt wird, so ist $\frac{1}{2}c$ die Projection der Streckensumme auf r.[1])

Zusatz II. *Der gesuchte Schraubungswinkel und die Richtung der gesuchten Schraubenaxe ist gleich denjenigen einer Drehung, welche man durch Zusammensetzung zweier Drehungen um sich schneidende Axen erhält, deren Axenrichtungen und Drehwinkel denen der gegebenen Schraubungen gleich sind.*

Denn setzt man a und b gleich Null, und verschiebt p und q so, dass sie sich in einem Punkte O treffen, so gehen bei Verwendung derselben Winkel α und β die Geraden s, t, u, parallel zu ihrer früheren Lage, durch O, und $\{s, u\}$ stellt eine Drehung dar, deren Axe zu r parallel durch O geht, und deren Winkel gleich γ ist (9.).

Dadurch haben wir zugleich den Satz erhalten:

Zwei Drehungen, deren Axen sich in einem Punkte treffen, sind durch eine einzige zu ersetzen, deren Axe durch denselben Punkt geht.

In gleicher Weise lassen sich die übrigen bekannten Sätze über Zusammensetzung besonderer Bewegungen aus der allgemeinen Construction ablesen.

---

1) Der Zusatz I ist nur für den besonderen Fall der Zusammensetzung zweier *Drehungen* ($a = 0$, $b = 0$) bekannt. Man vergleiche SCHELL: »Theorie der Bewegung und der Kräfte« 2. Auflage, I. Bd., S. 180—182.



(Abdruck aus den Berichten der math.-phys. Classe der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften 1890.)

SITZUNG VOM 3. MÄRZ 1890.

Hermann Wiener, *Zur Theorie der Umwendungen.*[1]) Vorgelegt von Neumann. Mit 7 Figuren.

IV. Die Ueberführung eines Systems aus einer Lage in eine beliebige andere.

12. Die Wichtigkeit der vorausgehenden Betrachtungen beruht, wie erwähnt, auf dem Satz, dass jedes starre System aus einer Lage in jede andre durch eine Schraubung gebracht werden kann, oder, wie wir jetzt besser sagen, um auch die besonderen Fälle einzuschliessen, durch die Folge zweier Umwendungen. Den bisherigen Elementarbewegungen entsprechend, führte man den Beweis so, dass man das System aus der Anfangslage durch eine Schiebung in eine Zwischenlage brachte, von welcher aus es durch eine Drehung in die Endlage übergeführt werden konnte, woraus der Satz folgt, wenn man weiss, dass sich diese beiden Bewegungen zu einer Schraubung vereinigen. Ist so der Beweis geleistet, so lässt sich auch eine einfache Construction für die Axe dieser Schraubung angeben[2]).

Sollen die Umwendungen die Grundlage bilden, so ist dieser Beweis durch einen anderen zu ersetzen. Wir wollen im Folgenden einen solchen führen, der sich durch die Einfachheit seiner Voraussetzungen auszeichnet. Wir knüpfen, ohne die Betrachtungen des II. und III. Abschnittes zu benützen, direct an den Begriff der Umwendung an, indem wir, nach Aufstellung einer einfachen Bedingung für die Umwendbarkeit zweier Punkte in

1) Dieser Aufsatz ist die Fortsetzung des auf Seite 13—23 abgedruckten: »Die Zusammensetzung zweier endlichen Schraubungen zu einer einzigen«.

2) Man vergleiche Schell »Theorie der Bewegung und der Kräfte«, 2. Auflage. S. 161 u. 162.

zwei andere (13.), einen Satz ableiten, der, wie sich später ergeben wird, auch von Wichtigkeit zur Beurteilung der Stellung ist, welche die Theorie der Umwendungen verwandten Zweigen der Geometrie gegenüber einnimmt: den Satz, dass jede Bewegung, welche die Lage zweier Punkte gegenseitig vertauscht, durch eine Umwendung ersetzt werden kann (14.), woraus sich sofort ergiebt, dass dasselbe von einer Bewegung gilt, welche eine Gerade mit sich selbst in umgekehrtem Sinne zur Deckung bringt (15.). Nun lässt sich aber jede Gerade durch eine Umwendung mit jeder anderen in beliebigem Sinne zur Deckung bringen (16.). Man braucht also (17.) nur irgend eine Gerade des Systems aus ihrer Anfangslage in umgekehrtem Sinne in ihre Endlage umzuwenden, so ist das System dadurch in eine Zwischenlage gelangt, aus der es durch eine zweite Umwendung in die Endlage gebracht werden kann.

Dieser Gang des Beweises hat noch den Vortheil vor dem bisherigen, dass er sofort die beiden Geraden liefert, um welche umgewandt werden muss, was dann mit Rücksicht auf die Sätze des II. Abschnittes noch auf eine neue Eigenschaft der Schraubenaxe führt (18.).

13. Vorerst stellen wir eine einfache Bedingung dafür auf, dass zwei starr verbundene Punkte durch eine Umwendung um eine Gerade aus den Anfangslagen A_1, B_1 in die Endlagen A_2, B_2 gebracht werden können. Bei dieser Bewegung müssen die in A_1 und A_2, und ebenso die in B_1 und B_2 gelegenen Punkte gerade ihre Lage vertauschen; wenn also s die Axe der Umwendung ist, so wird

$$A_1 A_2 B_1 B_2 \{ s \} A_2 A_1 B_2 B_1 .$$

Daraus folgen (nach 3.) die Gleichungen:

$$A_1 B_1 = A_2 B_2 ; \quad A_1 B_2 = A_2 B_1 ,$$

wovon die erste ausdrückt, dass die Punkte starr verbunden sind, also nur die zweite etwas Neues aussagt.

Wir können nun auch die Umkehrung dieses Satzes beweisen:

Zwei starr verbundene Punkte lassen sich aus einer Anfangslage A_1, B_1 durch eine Umwendung in die Endlage A_2, B_2 bringen, wenn die geradlinigen Stücke zwischen der Anfangslage eines jeden und der Endlage des anderen gleich lang sind, also wenn $A_1 B_2 = A_2 B_1$.

Es ist nur zu zeigen, dass unter dieser Bedingung die Verbindungsgerade der Mittelpunkte der beiden Stücke $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ auf diesen senkrecht steht, d. h. wenn M und N diese Mittelpunkte sind, dass

$$MN \perp A_1 A_2 \quad \text{und} \quad MN \perp B_1 B_2 .$$

Da die Punkte starr verbunden sind, tritt zu der Bedingung noch die weitere:

$$A_1 B_1 = A_2 B_2 ,$$

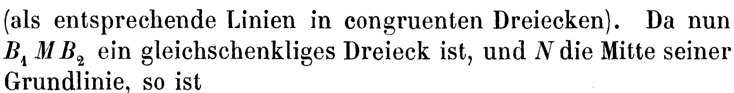
woraus folgt

I: $\triangle A_1 A_2 B_1 \cong A_2 A_1 B_2$,

II: $\triangle B_1 B_2 A_1 \cong B_2 B_1 A_2$

(Congruenz wegen Gleichheit dreier Seiten); dann folgt aus I.

$$MB_1 = MB_2$$



(als entsprechende Linien in congruenten Dreiecken). Da nun $B_1 M B_2$ ein gleichschenkliges Dreieck ist, und N die Mitte seiner Grundlinie, so ist

$$MN \perp B_1 B_2 .$$

Ebenso folgt aus II.

$$MN \perp A_1 A_2 ,$$

w. z. b. w.

14. **Satz**. *Eine Bewegung, bei der zwei Punkte ihre Lage vertauschen, ist stets durch eine Umwendung ersetzbar.*

Denn wird durch die Bewegung, welche wir der früheren Bezeichnung (3.) entsprechend durch $\{\mathfrak{B}\}$ ausdrücken wollen, die Lage der in A_1 und A_2 befindlichen Punkte vertauscht, und ist B_1 ein beliebiger, nicht auf der Geraden $A_1 A_2$ gelegener, weiterer Punkt, B_2 die Endlage desselben, also

$$A_1 A_2 B_1 \{\mathfrak{B}\} A_2 A_1 B_2 ,$$

so ist wegen der Starre des Systems

$$A_1 B_1 = A_2 B_2 ; \quad A_2 B_1 = A_1 B_2 ,$$

also (13.) giebt es eine Gerade s, so dass:

$$A_1 B_1 \{s\} A_2 B_2 ,$$

was auch geschrieben werden kann:

$$A_1 A_2 B_1 \{s\} A_2 A_1 B_2 .$$

Daraus folgt, dass ein Dreieck durch $\{\mathfrak{B}\}$ und durch $\{s\}$ in dieselbe Endlage übergeführt wird, also (7.)

$$\{\mathfrak{B}\} = \{s\}.$$

Zusatz I. *Vertauschen bei einer Bewegung zwei Punkte ihre Lage, so vertauscht jeder Punkt seine Lage mit demjenigen, in welchen er bei der Bewegung übergeht*[1]).

Zusatz II. *Es giebt keine involutorische Bewegung, die nicht durch eine Umwendung zu ersetzen wäre.*

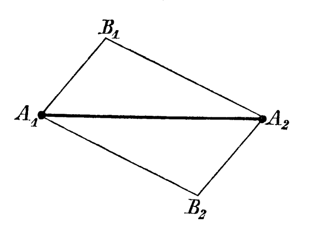
Denn die Bedingung der involutorischen Bewegung verlangt (4.), dass ein Punkt, welchen sie aus A_1 nach A_2 bringt, bei ihrer Wiederholung nach A_1 zurückkehre. Dann ist die Bewegung aber, wie eben bewiesen, durch eine Umwendung ersetzbar[2]).

15. Bei einer Umwendung gelangt jede Gerade, welche die Umwendaxe senkrecht trifft, mit sich selbst zur Deckung, doch so, dass ein der Geraden beigelegter Sinn in den umgekehrten verwandelt wird. Es gilt aber auch umgekehrt der

Satz. *Wird durch eine Bewegung eine Gerade mit sich selbst in umgekehrtem Sinne zur Deckung gebracht, so lässt sich die Bewegung durch eine Umwendung ersetzen, deren Axe die Gerade senkrecht trifft.*

---

1) Durch die Bestimmung, dass A_1 und A_2 ihre Lage vertauschen sollen, ist die Endlage noch nicht bestimmt, da das starre System, der Bedingung folgend, sich immer noch um die Gerade $A_1 A_2$ drehen kann. Aber in jede dieser möglichen Endlagen kann es durch eine Umwendung gebracht werden; als Umwendaxe kann jede auf $A_1 A_2$ mittelsenkrechte Gerade dienen; bestimmt ist dieselbe erst, wenn von einem ausserhalb dieser Geraden gelegenen Punkte Anfangs- und Endlage B_1, B_2 gegeben sind.



Um diese wichtigen Verhältnisse in die Anschauung aufzunehmen, verfertige man sich ein Modell, bestehend aus einem Parallelogramm $A_1 B_1 A_2 B_2$, das man aus starkem Papier ausschneidet und längs der Diagonale $A_1 A_2$ umbiegt. Zu jeder Lage, die man den beiden Dreiecken ertheilen kann, sucht man sich in Gedanken leicht die zugehörige Umwendaxe, welche $A_1 A_2 B_1$ in $A_2 A_1 B_2$ überführt.

2) Die *identische* Bewegung wird nicht als involutorisch angesehen, da sie schon selbst, nicht aber erst ihre Wiederholung das System in die Ausgangslage zurückbringt.

Denn sind A_1, B_1 die Anfangslagen zweier Punkte jener Geraden, A_2, B_2 ihre Endlagen, so bewirkt die Bedingung der Starre, verbunden mit der Voraussetzung über die Umkehrung des Sinnes die Streckengleichung:

$$\overline{A_1 B_1} = \overline{B_2 A_2} .$$

Fällt dabei der Punkt B_1 mit A_2 zusammen, so folgt aus dieser Gleichung, dass B_2 nach A_1 fällt; es vertauschen also bei der Bewegung die Punkte A_1 und A_2 ihre Lage, woraus (nach 14.) der Satz folgt.

16. **Satz.** *Eine Gerade kann durch eine Umwendung mit jeder anderen Geraden des Raumes so zur Deckung gebracht werden, dass ein bestimmter Sinn der ersten in einen bestimmten Sinn der zweiten übergeht.*

Es seien zwei beliebige Geraden a_1 und a_2 gegeben, und es sei festgesetzt, in welchen Sinn von a_2 ein bestimmter Sinn von a_1 übergehen soll. Sind dann M_1, M_2 die Fusspunkte derjenigen Geraden, welche a_1 und a_2 senkrecht trifft (oder wenn es unendlich viele solcher Geraden giebt, die Fusspunkte irgend einer von ihnen), und ist ferner A_1 irgend ein Punkt von a_1, so bestimme man den Punkt A_2 so, dass dem Sinne $A_1 M_1$ auf a_1 nach unserer Festsetzung der Sinn $A_2 M_2$ auf a_2 entspricht, und dass:

$$A_1 M_1 = A_2 M_2 ,$$

so ist auch

$$\triangle A_1 M_1 M_2 \cong A_2 M_2 M_1$$

(als rechtwinklige Dreiecke mit entsprechend gleichen Katheten), woraus folgt:

$$A_1 M_2 = A_2 M_1 .$$

Daher giebt es (13.) eine Gerade s, so dass:

$$A_1 M_1 \{ s \} A_2 M_2 ,$$

w. z. b. w. —

Zieht man durch den Mittelpunkt M des Stückes $M_1 M_2$ die beiden Geraden a'_1, a'_2 parallel zu a_1, bezw. a_2, so wird

$$a_1 a'_1 \{ s \} a_2 a'_2 ,$$

da durch die Umwendung M in sich selbst, und parallele Geraden wieder in parallele übergehen. Daher ist s eine Halbirungsgerade des Winkels $(a'_1 a'_2)$. Kehrt man den Sinn auf a_2 um, so

erhält man als Lösung die andere halbirende Gerade s' dieses Winkels.

Zusatz. *Es ist auf zwei Arten möglich, eine Gerade durch Umwendung in eine andere überzuführen; die beiden Umwendaxen schneiden sich senkrecht im Mittelpunkt des kürzesten Abstandes der beiden Geraden, welchen sie ebenfalls senkrecht treffen, und bilden mit jenen dieselben Winkel*[1]).

17. **Hauptsatz.** *Ein starres System lässt sich aus einer Lage stets durch zwei Umwendungen in jede andere Lage bringen.*

Ist a_1 die Anfangslage, a_2 die Endlage irgend einer Geraden des starren Systems, so suche man (nach 16.) die (bezw. eine) Gerade, um welche jene Gerade in *umgekehrtem Sinne* nach a_2 umgewandt wird. Dadurch gelangt das System in eine Zwischenlage, in der es mit der Endlage eine Gerade, in umgekehrtem Sinne, gemein hat, es lässt sich also (15.) durch *eine* weitere Umwendung aus jener in diese bringen. W. z. b. w.

Dies ist die allgemein giltige Form des Satzes. Wir haben zu seiner Ableitung weder den Inhalt des II. noch den des III. Abschnittes benützt. Unter Berücksichtigung der Ergebnisse des II. Abschnittes erhält der Satz folgende Form:

Zusatz. *Ein starres System lässt sich aus einer Lage in eine andere entweder durch eine Schiebung oder durch eine Drehung oder durch eine Schraubung bringen.*

---

18. Der Gang des vorigen Beweises führt zugleich auf die Lösung der Aufgabe, die Axen der beiden Umwendungen zu finden, welche ein Dreieck aus der gegebenen Anfangslage $A_1 B_1 C_1$ in die gegebene Endlage $A_2 B_2 C_2$ bringen. Man suche erst die Gerade s, um welche die Gerade $B_1 C_1$ so umgewandt wird, dass sie in umgekehrtem Sinne mit der Geraden $B_2 C_2$ zur Deckung kommt; gelangen dabei die Punkte B_1, C_1 nach B_{12}, C_{12} auf der Geraden $B_2 C_2$, so wird

$$\overline{C_{12} B_{12}} = \overline{B_2 C_2} .$$

---

1) Hierzu stellt man sich ein ebenso einfaches wie lehrreiches Modell her, indem man ein auf beiden Seiten zugespitztes Streichholz (m) in die Mitte zweier anderen Streichhölzer (a_1, a_2) senkrecht einsteckt. Die Geraden s und s' werden durch zwei Stecknadeln dargestellt, welche man in m einsteckt. Durch Umwendung um sie wird man die Lagen der Streichhölzer a_1 und a_2 vertauschen können, und zwar so, dass die Köpfchen ihre Lage entweder gegenseitig, oder mit den Fussenden vertauschen.

Gelangt dabei ferner der Punkt A_1 in die Lage A_{12}, so ist die Axe der zweiten Umwendung dadurch bestimmt, dass durch sie die Punkte A_{12}, B_{12}, (C_{12}) nach A_2, B_2, (C_2) gelangen sollen.

Um die *Schraubenaxe* zu finden lässt sich dieses Verfahren durch ein anderes ersetzen, welches die drei Punkte des Dreiecks gleichartig benützt. Denn man weiss (10.), dass die Gerade s — und auch jede andere ebenso gefundene Gerade — die Schraubenaxe senkrecht trifft. Daraus folgt der

Satz. *Wird durch eine Bewegung das Dreieck $A_1 B_1 C_1$ in das Dreieck $A_2 B_2 C_2$ übergeführt, so werden diejenigen drei Geraden, um welche die drei Seiten des ersten Dreiecks umgewandt werden müssen, um mit den entsprechenden Seiten des zweiten in umgekehrtem Sinne zur Deckung zu gelangen, von ein und derselben weiteren Geraden senkrecht getroffen, nämlich von der Axe der Schraubung, welche das erste Dreieck in das zweite überführt.*

Bei der wirklichen Ausführung der Construction sind natürlich nur zwei der Umdrehaxen nothwendig.

Die *Höhe* und der *Winkel* der Schraubung werden dann in der bekannten Weise gefunden. Sind nämlich t_1 und t_2 die beiden Geraden, welche die Punkte A_1 und A_2 senkrecht auf die Schraubenaxe projiciren, so kann man (10., Umkehrung) die Schraubung durch $\{t_1, u\}$ ersetzen, wo u, die Schraubenaxe senkrecht schneidend, so bestimmt ist, dass der Punkt A_1, welcher bei $\{t_1\}$ seine Lage beibehält, bei $\{u\}$ nach A_2 gelangt; und ebenso durch $\{u', t_2\}$, wo u' genau denselben Bedingungen unterliegt, also mit u zusammenfällt. Die Schraubung ist also durch

$$\{t_1, u\} = \{u, t_2\}$$

ersetzbar, die *Höhe* der Schraubung ist also (10., Satz) gleich dem doppelten Abstand von t_1, u oder von u, t_2, d. h. gleich dem Abstand von t_1, t_2 d. i. gleich der *senkrechten Projection von $A_1 A_2$ auf die Schraubenaxe;* ebenso der *Winkel* der Schraubung gleich

$$\measuredangle\ 2(t_1 u) = 2(u t_2) = (t_1 t_2),$$

d. h. *gleich dem Winkel der beiden Geraden, welche die Strecke $A_1 A_2$ senkrecht auf die Schraubenaxe projiciren.*

19. Noch in einer anderen einfachen Weise ergeben sich für eine nicht specielle Bewegung $\{\mathfrak{B}\}$ die Elemente der

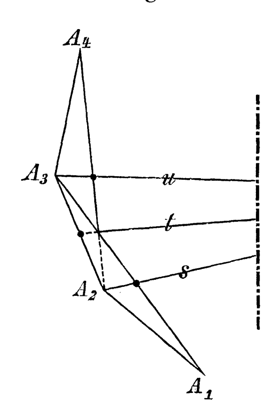
Schraubung, welche sie ersetzt, indem wir nur die in 13. aufgestellte Bedingung benützen.

Gelangt durch eine gegebene Bewegung ein Punkt aus der Lage A_1 nach A_2, ein zweiter Punkt aus A_2 nach A_3, ein dritter aus A_3 nach A_4, so ist

$$A_1 A_2 A_3 \{\mathfrak{B}\} A_2 A_3 A_4 ,$$

d. h. es geht — wenn nicht A_1, A_2, A_3 in einer Geraden liegen — das Dreieck $A_1 A_2 A_3$ in das Dreieck $A_2 A_3 A_4$ über; es ist dann in Folge der Starre des Systems:

$$A_1 A_2 = A_2 A_3 = A_3 A_4 ,$$
$$A_1 A_3 = A_2 A_4 .$$



Wir bestimmen nun die drei Geraden s, t, u so, dass

I: $A_1 A_2 \{s\} A_3 A_2$,

II: $A_1 A_2 \{t\} A_4 A_3$,

III: $A_2 A_3 \{u\} A_4 A_3$,

was immer möglich ist, da die Geraden s und u (für I und III) Symmetrielinien gleichschenkliger Dreiecke sind, und (für II) die (nach 13.) nothwendigen Bedingungen gelten:

$$A_1 A_2 = A_4 A_3 , \quad A_1 A_3 = A_4 A_2 ;$$

dann wird:

$$A_1 A_2 A_3 \{s\} A_3 A_2 A_1 \{t\} A_2 A_3 A_4 \{u\} A_4 A_3 A_2 ,$$

also $\quad A_1 A_2 A_3 \{s, t\} A_2 A_3 A_4 ,$

und $\quad A_1 A_2 A_3 \{t, u\} A_2 A_3 A_4 ,$

daher (7.) $\quad \{s, t\} = \{t, u\} = \{\mathfrak{B}\} .$

Dadurch ist ein neuer Beweis des Satzes gegeben, dass jede solche Bewegung durch zwei Umwendungen zu ersetzen ist[1]). Die Schraubenaxe ist die Gerade, welche s und u senkrecht trifft

1) Da dieser Beweis noch eine besondere Betrachtung des Falles fordert, dass die Punkte A_1, A_2, A_3 in einer Geraden liegen (in der Schraubenaxe, oder wenn die Bewegung durch eine Schiebung zu ersetzen ist, in einer in der Schiebungsrichtung verlaufenden Geraden), so ist der in 17. gegebene diesem i. a. vorzuziehen.

(und zugleich auch t); die Höhe der Schraubung ist der doppelte kürzeste Abstand von s, t, und auch von t, u, d. h. der kürzeste Abstand von s, u.

Der Winkel der Schraubung ist

$$\measuredangle 2(s, t) = 2(t, u) = (su) .$$

Dies liefert den

Satz. *Geht durch eine Bewegung, die keine Schiebung ist, ein starres System aus einer Lage in eine neue über, und man bestimmt im Raume eine solche Kette von Punkten* A_1, A_2, A_3, A_4, *dass durch die Bewegung das Dreieck* $A_1 A_2 A_3$ *in die neue Lage* $A_2 A_3 A_4$ *übergeht, so lässt sich die Bewegung durch eine Schraubung ersetzen, deren Axe in die Linie des kürzesten Abstandes der Symmetrielinien jener beiden (gleichschenkligen) Dreiecke fällt, während Höhe und Winkel der Schraubung dem kürzesten Abstand und dem Winkel dieser Symmetrielinien gleich ist.*

Zusatz. *Fallen die vier Punkte* A_1, A_2, A_3, A_4 *in eine Ebene, so ist die Bewegung durch eine Drehung zu ersetzen.*

---

20. Als Anhang zu diesem Abschnitt sei noch Einiges über die Sonderstellung gesagt, welche die *Schiebungen* den übrigen Bewegungen gegenüber einnehmen. Wir sahen, dass jede Bewegung durch zwei Umwendungen ersetzt werden kann, von denen die eine nach gewissen Willkürlichkeiten angenommen werden darf, während die andere dadurch eindeutig bestimmt ist.

Ist die Bewegung eine *Schraubung* oder eine *Drehung*, so muss die wählbare Gerade die Schrauben- bezw. Drehaxe senkrecht treffen (nach der Umkehrung von 9. und 10.). Es giebt also eine *zweifache Mannigfaltigkeit* von Geraden, die zur Darstellung dienen können, und zwar durch jeden Punkt und ebenso in jeder Ebene im Allgemeinen eine einzige solche Gerade, d. h. sie kann eine beliebige Gerade eines *Strahlsystems* ersten Grades sein.

Bei der *Schiebung* dagegen ist (nach 8., Umkehrung) die Bedingung die, dass die Gerade senkrecht zur Schiebungsrichtung ist; es giebt also durch jeden Punkt einen Strahlenbüschel und in jeder Ebene einen Parallelstrahlenbüschel solcher Geraden, d. h. sie erfüllen einen *Complex* ersten Grades.

Da wir nun jede Bewegung durch Geradenpaare ausdrückten, so kommen wir zum Schluss:

Unter allen Geradenpaaren des Raumes nehmen in unserer Theorie die Paare paralleler Geraden eine bevorzugte Stellung ein.

Dies macht sich auch weiterhin geltend. In den vorigen Entwickelungen kommt fortwährend die Aufgabe vor, diejenige Gerade zu suchen, welche zwei gegebene Geraden senkrecht trifft[1]).

Eine Lösung dieser Aufgabe ist stets vorhanden, sind aber die beiden Geraden parallel, so giebt es sogar einfach unendlich viele solche Geraden, die einem Parallelstrahlenbüschel angehören.

Dies wiederum macht sich vor Allem bemerkbar bei der Aufgabe, eine Gerade a_1 durch Umwendung in eine andre a_2 überzuführen. Sind die Geraden parallel, so kann man den Sinn der einen Geraden auf die andere übertragen, und es giebt eine einzige Gerade, um welche a_1 in demselben Sinne nach a_2 umgewandt wird, dagegen einfach unendlich viele bei Umkehrung des Sinnes.

21. Noch eine weitere Ausartung dieser Verhältnisse ergiebt sich, wenn das System mit sich selbst wieder zur *Deckung* gelangt. Die beiden Geraden fallen dann in eine einzige zusammen, und *jede Gerade s* des Raumes kann als solche gewählt werden, da durch $\{s, s\}$ stets die Deckung von Anfangs- und Endlage ausgedrückt wird (4.). Daraus folgt:

Eine noch mehr bevorzugte Stellung unter den Geradenpaaren nehmen diejenigen ein, deren Geraden zusammenfallen.

Die Gesammtheit aller Geraden, welche zwei zusammenfallende senkrecht treffen, ist eine *zweifache Mannigfaltigkeit* (ein lineares Strahlsystem).

Die Aufgabe, die eine von zwei zusammenfallenden Geraden durch eine Umwendung in die andere überzuführen, liefert unter Beibehaltung des Sinnes eine einzige Gerade — sie selbst — und bei Umkehrung des Sinnes eine zweifache Mannigfaltigkeit, nämlich alle, von denen diese senkrecht getroffen wird.

Diese Ausartungen der Gebilde, wenn die Geraden eines Paares parallel werden oder zusammenfallen, sind im vorigen nicht jedes Mal genau aufgeführt, und wir wollen es zur Vermeidung von Weitläufigkeiten auch im folgenden i. a. unterlassen.

---

1) Der sonst dafür gebräuchliche Ausdruck »Die Linie des kürzesten Abstandes zweier Geraden« ist nicht verwendbar, wenn die beiden Geraden sich schneiden.

V. Die Ueberführung einer Geraden in eine andere.

22. Wir gehen in diesem Abschnitt zu einer Aufgabe über, die uns willkommene Beispiele für die allgemeineren Betrachtungen liefern soll, welche in den folgenden Abschnitten angestellt werden. Wir wollen die Gesammtheit aller der Schraubungen aufsuchen, die eine gegebene Gerade in eine zweite gegebene überführen[1]).

Einleitend dazu betrachten wir die Möglichkeit, *dass durch eine Bewegung eine Gerade in sich selbst übergeführt werde*, u. zw. zuerst durch eine *Umwendung*. Wird dabei der Sinn der Geraden in seinen entgegengesetzten verwandelt, so schneidet die Gerade die Umwendaxe senkrecht (15.). Soll dagegen der Sinn erhalten bleiben, so muss jeder Punkt der Geraden in sich übergehen, dieselbe also die Umwendaxe sein; denn ginge ein Punkt A_1 der Geraden in einen anderen A_2 über, welcher nach der Voraussetzung ebenfalls auf der Geraden liegt, so vertauschten die beiden Punkte ihre Lage, die Gerade also ihren Sinn.

Satz. *Bei einer Umwendung geht die Umwendaxe in gleichem Sinn, jede sie senkrecht treffende Gerade in entgegengesetztem Sinn in sich über.*

Umgekehrt ist eine Gerade, welche bei einer Umwendung in gleichem bezw. entgegengesetztem Sinn in sich übergeht, die Umwendaxe, bezw. eine diese senkrecht schneidende Gerade.

23. Betrachten wir eine beliebige Bewegung, so ist dieselbe, wenn sie eine Gerade in entgegengesetztem Sinn in sich überführt (nach 15.), durch eine Umwendung ersetzbar, wir haben also nur noch den Fall zu betrachten, dass eine Gerade — sie heisse p — unter Beibehaltung ihres Sinnes in sich übergeht. Dann stelle man, was immer möglich ist, die Bewegung als Folge zweier Umwendungen $\{s, t\}$ dar, so dass die erste Umwendaxe s die Gerade p senkrecht trifft. (Es giebt ja für jede ganz beliebige Gerade eine solche Gerade, nämlich diejenige,

1) Der Zusammenhang der hier abgeleiteten Sätze mit der Theorie der Projectivitäten soll im letzten Abschnitt erörtert werden.

welche sie und die Schraubenaxe senkrecht trifft, im besonderen Falle sogar unendlich viele).

Dann geht durch $\{s\}$ die Gerade p mit Umkehrung ihres Sinnes in sich über; durch $\{s, t\}$, d. h. indem man jetzt noch die Umwendung um t hinzufügt, soll aber die Gerade in gleichem Sinne in sich übergehen, d. h. auch t führt p in entgegengesetztem Sinn in sich über. Es ist daher (22.) p eine Gerade, welche sowohl von s, als von t senkrecht geschnitten wird, d. h. wenn s nicht parallel zu t ist, die Schraubenaxe (10.), im anderen Falle (8.) eine Gerade, welche in der Richtung der Schiebung verläuft.

In jedem Falle ist der Abstand der beiden Geraden die halbe Strecke, um welche p in sich verschoben wird; ist derselbe Null, d. h. die Bewegung eine Drehung bezw. Umwendung (9.), so bleibt jeder Punkt der Geraden, welche Dreh- bezw. Umwendaxe ist, an seiner Stelle.

Satz. *Jede Schiebung führt alle diejenigen Geraden, welche die Schiebungsrichtung haben, jede andere Bewegung die Schrauben- (Dreh-, Umwend-) Axe in gleichem Sinn in sich über.*

Umgekehrt: Geht durch eine Bewegung eine Gerade in gleichem Sinn in sich über, so fällt sie bei der Schiebung in die Schiebungsrichtung, bei jeder andern Bewegung in die Schrauben- (Dreh-, Umwend-) Axe.

---

24. Wir stellen die Bedingung dafür auf, dass durch eine Bewegung $\{\mathfrak{B}\}$ eine Gerade a in einem vorgeschriebenen Sinn in eine Gerade a' übergeführt werde.

Ist dies der Fall, und ist s die Gerade, welche a und die Schraubenaxe von $\{\mathfrak{B}\}$ senkrecht trifft, so setze man:

$$\{\mathfrak{B}\} = \{s, t\} = \{t, s'\},$$

wo nun t, und dann auch s' (10. Umkehrung) eindeutig bestimmte Geraden sind.

Hierbei bringt $\{s\}$ nach der Voraussetzung (22. Satz) die Gerade a mit sich selbst in umgekehrtem Sinn zur Deckung, daher muss $\{t\}$ (wegen $\{\mathfrak{B}\} = \{s, t\}$) die Gerade a so nach a' bringen, dass der Sinn wieder der vorgeschriebene wird.

Demnach bringt $\{t\}$ die Gerade a in dem Sinne, der dem vorgeschriebenen entgegengesetzt ist, nach a', daher muss $\{s'\}$

(wegen $\{\mathfrak{B}\} = \{t, s'\}$) die Gerade a' mit sich selbst in umgekehrtem Sinn zur Deckung bringen, d. h. es schneiden sich a' und s' senkrecht (22. Umkehrung).

Hätte man s' zuerst als diejenige Gerade angenommen, welche a' und die Schraubenaxe von $\{\mathfrak{B}\}$ senkrecht trifft, so wäre man vermöge derselben Schlüsse auf t und s gekommen.

Satz. *Jede Bewegung $\{\mathfrak{B}\}$, welche eine Gerade a in einem vorgeschriebenen Sinne in eine Gerade a' überführt, während dies von der Umwendung um eine Gerade t im umgekehrten Sinn geleistet wird, ist darstellbar durch*

$$\{\mathfrak{B}\} = \{s, t\} = \{t, s'\},$$

wo die Gerade s, bezw. s', die Gerade a, bezw. a', senkrecht trifft.

Umkehrung. *Nimmt man eine der Geraden s, s' so an, dass sie a, bezw. a', senkrecht trifft, so führt die wie vorhin zusammengesetzte Bewegung $\{\mathfrak{B}\}$ a im vorgeschriebenen Sinne in a' über.*

Denn treffen sich s und a senkrecht, so wird a durch $\{s\}$ im umgekehrten Sinne in sich übergeführt, also durch $\{t\}$ im vorgeschriebenen Sinne nach a' gebracht; und entsprechendes gilt für s'.

25. Es seien nun zwei beliebige Bewegungen, die wir mit $\{\mathfrak{B}_1\}$ und $\{\mathfrak{B}_2\}$ bezeichnen wollen, gegeben. Die Zusammensetzung derselben geschieht (nach 11.)[1]), indem man jede so in zwei Umwendungen zerlegt, dass die zweite Umwendung von $\{\mathfrak{B}_1\}$ mit der ersten von $\{\mathfrak{B}_2\}$ übereinstimmt.

Eine weitere uns hier angehende Beziehung zwischen den beiden Bewegungen erhalten wir, indem wir die den Bewegungen gemeinschaftliche Umwendung in *beiden* als erste oder als zweite

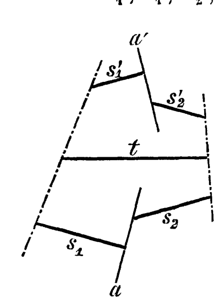
---

1) Erst nachträglich erhalte ich durch die Güte des Herrn SCHELL Kenntniss von einem Aufsatz von BURNSIDE [»On the resultant of two finite displacements of a rigid body«. Messenger of Math. XIX. S. 104—108. (1889)], in welchem die in Art. 11 angegebene Lösung schon enthalten ist. Doch glaube ich, dass meine Darstellung der Construction dadurch an Interesse nicht verliert, da sie sich aus einem neuen, allgemeinen Princip (der Zerlegung jeder Bewegung in zwei Umwendungen) als unmittelbare Folge ergiebt. Die beiden Auffassungen der Construction sind wesentlich verschieden, da die Geraden des Raumes dort als *Objecte* der Bewegung, hier als *Träger* derselben (der Umwendungen) erscheinen. Dieser Unterschied tritt am schärfsten im Beweise hervor, der in Art. 11. in einer einzigen Gleichung enthalten ist.

benützen. D. h. wir setzen, wenn t die Gerade ist, welche die Schraubenaxe von $\{\mathfrak{B}_1\}$ und von $\{\mathfrak{B}_2\}$ senkrecht trifft,

$$\{\mathfrak{B}_1\} = \{s_1, t\} = \{t, s_1'\}$$
$$\{\mathfrak{B}_2\} = \{s_2, t\} = \{t, s_2'\},$$

wo nun s_1, s_1', s_2, s_2' eindeutig bestimmte Geraden sind (10.).



Soll jetzt eine Gerade a durch beide Bewegungen in dem gleichen vorgeschriebenen Sinn nach a' gelangen, so muss die Gerade, welche a im anderen Sinn nach a' bringt, die Schraubenaxen beider Bewegungen senkrecht treffen (nach 24. und 10.), diese Gerade ist also t.

Daher muss a (24.) sowohl s_1, wie s_2 senkrecht treffen, und ebenso a' sowohl s_1', wie s_2'.

Satz. *Sind zwei beliebige Bewegungen gegeben, so giebt es stets eine Gerade a, welche durch die beiden Bewegungen mit ein und derselben Geraden a' in gleichem Sinn zur Deckung gelangt.*

Zusatz I. *Zerlegt man zwei beliebig gegebene Bewegungen $\{\mathfrak{B}_1\}$ und $\{\mathfrak{B}_2\}$ in der Weise, dass*

$$\{\mathfrak{B}_1\} = \{s_1, t\} = \{t, s_1'\},$$
$$\{\mathfrak{B}_2\} = \{s_2, t\} = \{t, s_2'\}$$

wird, was immer möglich ist, so wird durch beide Bewegungen diejenige Gerade a, welche s_1 und s_2 senkrecht trifft, in demselben Sinn in diejenige a' übergeführt, welche s_1' und s_2' senkrecht trifft.

Dagegen gelangt durch Umwendung um t die Gerade a in dem Sinne mit a' zur Deckung, der dem vorigen entgegengesetzt ist.

Bezeichnen wir die Umkehrung einer Bewegung $\{\mathfrak{B}\}$ durch $\{\mathfrak{B}^{-1}\}$, also

$$\{\mathfrak{B}_1^{-1}\} = \{t, s_1\} = \{s_1', t\}$$
$$\{\mathfrak{B}_2^{-1}\} = \{t, s_2\} = \{s_2', t\},$$

so wird:

$$\{\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2^{-1}\} = \{s_1, t, t, s_2\} = \{s_1, s_2\}$$
$$\{\mathfrak{B}_1^{-1}, \quad \mathfrak{B}_2\} = \{s_1', t, t, s_2'\} = \{s_1', s_2'\}.$$

Die Schraubenaxen dieser beiden Bewegungen sind demnach (10.) die beiden Geraden, welche s_1 und s_2 bezw. s_1' und s_2' senkrecht treffen, d. h. die Geraden a und a':

Zusatz II. *Sind zwei beliebige Bewegungen* $\{\mathfrak{B}_1\}$ *und* $\{\mathfrak{B}_2\}$ *gegeben, so wird durch beide die Schraubenaxe der Bewegung* $\{\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2^{-1}\}$ *in die Schraubenaxe von* $\{\mathfrak{B}_1^{-1}, \mathfrak{B}_2\}$ *übergeführt*[1]).

26. Sind zwei Geraden a und a' beliebig gegeben, so ist es jetzt leicht, *alle diejenigen Schraubungen zu finden, welche die Gerade a in einem vorgeschriebenen Sinne nach a' bringen.*

Vor Allem giebt es (16.) eine Umwendung, welche dieses leistet, sowie eine andere Umwendung, welche es im umgekehrten Sinn leistet; die beiden Umwendaxen seien t' und t.

Ist dann s irgend eine Gerade, welche a senkrecht trifft, so stellt

$$\{\mathfrak{B}\} = \{s, t\} = \{t, s'\}$$

eine Bewegung der verlangten Art dar (24. Umkehrung), und umgekehrt lässt sich jede solche Bewegung so darstellen (24.). Dabei treffen sich auch die Geraden a' und s' senkrecht.

Satz. *Man erhält alle Schraubungen, welche eine gegebene Gerade a in eine andere a' in vorgeschriebenem Sinn überführen, aus derjenigen Geraden t, welche dies im umgekehrten Sinn leistet, indem man die Umwendung um jede Gerade, welche a senkrecht*

---

1) In dieser Fassung lässt sich der Satz leicht auf den zurückführen, dass jede Bewegung eine Gerade in sich verschiebt (23). Wird nämlich ein starres System aus der Anfangslage Σ durch jene Bewegungen in die Endlage Σ_1 bezw. Σ_2 gebracht, so ist es möglich, dasselbe durch eine neue Bewegung $\{\mathfrak{C}\}$ aus der Lage Σ_1 in die Lage Σ_2 zu bringen. Bei dieser Bewegung wird eine Gerade (die Schraubenaxe) — sie heisse a' — nur in sich verschoben, d. h. eine Gerade der Lage Σ_1 deckt sich mit der entsprechenden Geraden in Σ_2; oder es gelangt eine Gerade — sie heisse a — sowohl durch die erste, wie durch die zweite Bewegung aus Σ mit derselben Geraden a' im gleichen Sinn zur Deckung.

Die Bewegung $\{\mathfrak{C}\}$, welche Σ_1 in Σ_2 überführt und deren Schraubenaxe die gesuchte Gerade a' ist, ergiebt sich so:

$$\Sigma\{\mathfrak{B}_1\}\Sigma_1, \qquad \Sigma\{\mathfrak{B}_2\}\Sigma_2,$$

also

$$\Sigma_1\{\mathfrak{B}_1^{-1}\}\Sigma\{\mathfrak{B}_2\}\Sigma_2,$$

d. h.

$$\{\mathfrak{B}_1^{-1}, \mathfrak{B}_2\} = \{\mathfrak{C}\}, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Durch Umkehrung der Betrachtungen findet man in gleicher Weise die Gerade a als Schraubenaxe einer Bewegung $\{\mathfrak{C}'\}$, welche ein System Σ_1' in die Lage Σ_2' überführt, wobei Σ_1' und Σ_2' so gewählt werden, dass sie durch die beiden Bewegungen $\{\mathfrak{B}_1\}$ und $\{\mathfrak{B}_2\}$ in dieselbe Endlage Σ' kommen, woraus wieder folgt

$$\{\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2^{-1}\} = \{\mathfrak{C}'\}.$$

trifft, mit der Umwendung um t zusammensetzt, oder auch, indem man die Umwendung um t mit der Umwendung um eine jede Gerade, welche a' senkrecht trifft, zusammensetzt.

Unter diesen Schraubungen ist auch eine Umwendung enthalten, nämlich die um t', als Folge der Umwendungen um t und der um die Gerade m, welche die zu einander senkrechten Geraden t und t' in demselben Punkte, und ausserdem a und a' senkrecht trifft (nach 16.).

27. Die *Schraubenaxen* aller dieser Bewegungen müssen die Gerade t senkrecht treffen, da die Umwendung um t bei ihnen allen als erzeugende auftritt.

Ist umgekehrt eine Gerade, welche t senkrecht trifft, gegeben, so kann sie die Schraubenaxe einer einzigen unter jenen Schraubungen sein. Denn jede Schraubung, welche diese Gerade zur Axe hat, ist durch $\{ s, t \}$ darstellbar, wo s eine beliebige Gerade sein kann, welche die Axe senkrecht trifft. Soll sie ausserdem zu den oben genanten Schraubungen gehören, so muss s auch a senkrecht treffen, und es giebt stets eine (und i. a. nur eine) solche Gerade.

Satz. *Die Schraubenaxen der erwähnten Bewegungen treffen alle die Gerade t senkrecht, und umgekehrt ist jede Gerade, welche t senkrecht trifft, Axe einer einzigen Schraubung der erwähnten Art.*

28. Nach dem Satze in 26. lassen sich alle jene Bewegungen darstellen durch

$$\{ \mathfrak{B}_i \} = \{ s_i, t \} = \{ t, s_i' \},$$

wo s_i (bezw. s_i') jede Gerade sein kann, welche a (bezw. a') senkrecht trifft. Eine der beiden Geraden s_i, s_i' kann dieser Begingung genügend angenommen werden. Es giebt daher eine zweifach unendliche Schaar von Schraubungen der bezeichneten Art.

Ebenso giebt es eine zweifach unendliche Schaar von Schraubungen, welche *a im andern Sinn* nach a' bringen. Sie lassen sich darstellen durch

$$\{ \mathfrak{B}_k' \} = \{ s_k, t' \} = \{ t', s_k' \},$$

wo s_k (bezw. s_k') derselben Bedingung wie s_i (bezw. s_i') unterworfen ist.

Greifen wir aus jeder dieser beiden Schaaren eine Bewegung heraus — sie mögen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ heissen — so werde ein

starres System aus der Lage Σ durch $\mathfrak{B}$ in eine neue Lage Σ_1, durch $\mathfrak{B}'$ nach Σ_2 gebracht. Dabei geht die mit dem System Σ verbundene Gerade a durch $\mathfrak{B}$ in a' der Lage Σ_1 über, und durch $\mathfrak{B}'$ in a' der Lage Σ_2, aber in umgekehrtem Sinne wie vorhin. Daraus folgt (15.), dass das System aus der Lage Σ_1 durch eine Umwendung nach Σ_2 gebracht werden kann.

Satz. *Wendet man auf ein starres System einmal eine Bewegung der Schaar* $\mathfrak{B}_i$, *das andre Mal eine solche der Schaar* $\mathfrak{B}_k'$ *an, so wird es in zwei solche Lagen gebracht, dass es durch eine Umwendung aus der einen in die andere übergeführt werden kann.*

Die Methode, die wir im bisher Gesagten befolgt haben, war eine wesentlich anschauliche. Von dem sich selbst aufdrängenden Formalismus haben wir insofern Gebrauch gemacht, als es zur Abkürzung des Ausdrucks unumgänglich nöthig war, doch nur so, dass wir bei jedem Zeichen eine anschauliche Operation im Sinne hatten.

Und doch liegt, wie ich glaube, der Hauptvorzug der Methode darin, dass sie zu einer neuen *Analysis der geometrischen Gebilde* Anlass giebt. Es wird sich daher in einem noch folgenden Abschnitt darum handeln, das Wesen dieser Analysis an einigen Beispielen vorzuführen, wodurch wir dann in den Stand gesetzt werden (im letzten Abschnitt) ein gemeinsames Band zu finden, welches die Geometrie der Bewegungen mit den anderen Teilen nicht nur der metrischen, sondern auch der projectiven Geometrie verknüpft, und so scheinbar auseinanderliegendes vereinigt.

(Abdruck aus den Berichten der math.-phys. Classe der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften 1890.)

SITZUNG VOM 7. JULI 1890.

Hermann Wiener, *Ueber geometrische Analysen.*[1]) Vorgelegt von Neumann. Mit 2 Figuren.

VI. Das Rechnen mit Verwandtschaften.[2])

29. Für ein jedes Gebiet der Geometrie sieht man sich an einem bestimmten Punkt der Entwickelung genötigt, eine Analysis auszubilden.

Die Analysis greift in zwei Richtungen helfend ein: da wo die Anschauung wegen der Häufung der Begriffe nicht mehr ausreicht, soll sie das Vorwärtsschreiten anbahnen; da wo die Gewohnheit uns den inneren Zusammenhang der Dinge verwischt, soll sie die Begriffe zergliedern helfen. Denn wir können uns nur schwer von den inneren Gründen dessen Rechenschaft geben, was uns durch häufigen Gebrauch selbstverständlich geworden ist. Und so bestimmen das »zu schwer« und das trügerische »zu leicht« die beiden Grenzen des rein anschaulichen Denkens. Dem *Fortschritt* auf der einen Seite steht daher auf der anderen die *Erkenntniss der Grundlagen* gegenüber, auf

---

1) Dieser Aufsatz bildet die Fortsetzung der beiden früheren: »Die Zusammensetzung zweier endlichen Schraubungen zu einer einzigen« (S. 13 bis 23) und »Zur Theorie der Umwendungen« (S. 71 bis 87). Um mich leichter auf frühere Stellen berufen zu können, habe ich die Sätze durchnummerirt.

2) Der Inhalt des Abschnittes VI beschäftigt sich im Wesentlichen mit dem, was man sonst auch das »Rechnen mit Operationsproducten« nennt. In fast allen Arbeiten, die solche Producte (Folgen) behandeln, sind die zu Grunde gelegten Operationen *Verwandtschaften*. Der Begriff »*Operation*« ist aber weiter, und umfasst ausser den Verwandtschaften (Transformationen) auch die *Verknüpfungen*, seien es nun Verknüpfungen von Objecten (z. B. Multiplication von Zahlen) oder von Verwandtschaften (z. B. *Zusammensetzung* zweier Bewegungen zu einer einzigen; Bildung von Folgen).

welchen ein Gebiet beruht, und in beiden Beziehungen muss eine brauchbare Analyse leistungsfähig sein.

Aber seit Grassmann ist allmählich immer mehr das Gefühl dafür wach geworden, dass man noch eine weitere Forderung an eine solche Analyse zu stellen hat, nämlich, dass sie selbst anschaulich sei. Unter einer *anschaulichen Analyse* ist eine solche zu verstehen, bei welcher mit jedem Schritt, den wir in der Rechnung mit Zeichen machen, ein bestimmter geometrischer Vorgang der Objecte parallel geht, die durch jene Zeichen ausgedrückt werden; so dass an jeder Stelle der Entwickelung der Uebergang von der Rechnung zur Anschauung, oder umgekehrt ermöglicht ist. Das beste Beispiel einer solchen anschaulichen Analysis ist in Grassmann's Ausdehnungslehre gegeben [1]).

30. Um nun auf die *Analysis der Umwendungen* zu kommen, so verhehle ich mir in Bezug auf den ersten der erwähnten Punkte keineswegs, dass sie noch einer weiteren Entwickelung bedarf, um in einfachster Weise die wichtigen Aufgaben zu lösen, die ihr vor Allem zufallen müssen, wie die Frage nach den Gruppen von Bewegungen [2]). Doch werden, wie ich hoffe, die folgenden Betrachtungen als eine erste Vorarbeit dazu dienen können. Vorläufig kommt es mir mehr auf den zweiten Punkt an: die *Grundlagen* der Theorie der Bewegungen soweit klarzustellen, dass der Zusammenhang mit anderen Theorien, die auf denselben Grundlagen beruhen, deutlich hervortritt.

Jeder Schritt, den wir dabei rechnerisch machen, lässt sich auch an den geometrischen Gebilden anschaulich verfolgen, so dass wir es also mit einem *anschaulichen Verfahren* zu thun haben. Und zwar gilt diese Veranschaulichung nicht nur für die im Früheren angestellten kinematischen Betrachtungen sondern ebenso gut für die anderen denselben Grundgesetzen folgenden geometrischen Theorien. Daher wird Jeder, der nur in einem dieser Gebiete bewandert ist — sei dies nun die

---

1) Der Unterschied der gewöhnlichen analytischen Geometrie von der Grassmann'schen Analysis besteht darin, dass jene alle Beziehungen geometrischer Gebilde in *Zahlbeziehungen* umsetzt, diese aber mit den Gebilden [Strecke, Feld (Moment), Linientheil (Kraft) u. s. w.] selbst rechnet.

2) Materiell ist diese Frage, mit welcher die andere, nach der Anzahl der möglichen Krystallsysteme, aufs Innigste zusammenhängt, durch die Arbeiten von C. Jordan, L. Sohncke und Schönfliess erledigt.

Kinematik, oder die allgemeinere Lehre von den Spiegelungen, sei es die Theorie der Projectivitäten oder die allgemeinere der Kreisverwandtschaften u. s. f. — sich in diesem Gebiet für jede Formel das anschauliche Bild suchen können.

---

31. Es soll nun gezeigt werden, wie man von den Umwendungen zu allgemeineren Theorien kommt.

Die Umwendungen, und allgemeiner die Bewegungen setzen einen starren Körper voraus, der sich bei der Bewegung in keiner Weise verändert. Dabei konnte für alle Betrachtungen, die wir in den vorigen Kapiteln anstellten, zweierlei als nebensächlich angesehen werden. Das eine war die *Gestalt des Körpers*, das andere der *Weg*, den er beim Uebergang von der Anfangs- zur Endlage beschrieb.

Was das Erste betrifft, so war bei der ganzen Bewegung nur die jeweilige Lage eines Dreiecks (7.) als bekannt vorauszusetzen, um die Bewegung fest zu legen. Mit dem Dreieck kann man dann eine beliebige Anzahl weiterer Punkte starr verbunden denken, ohne irgend etwas in der Betrachtung zu ändern. Es steht nun nichts im Wege, *alle* Punkte des Raumes mit dem Dreieck starr zu verbinden; und so kommen wir zum Begriff der Bewegung eines *starren räumlichen Systems*, und verstehen darunter eine solche Bewegung, welche alle Punkte des Raumes gleichzeitig erfasst.

Das Zweite, die Unabhängigkeit des Ergebnisses von den verschiedenen Zwischenlagen, weist uns darauf hin, die Zwischenlagen überhaupt hinwegzudenken und uns stets bloss die Anfangslage Σ_1 und die Endlage Σ_2 des starren räumlichen Systems vorzustellen; dadurch kommen wir zum Begriff der Beziehung, Zuordnung oder *Verwandtschaft*. In dieser entspricht jedem Punkt, der im System Σ_1 enthalten ist, ein ganz bestimmter Punkt in Σ_2; die Punkte sind dabei im einen, wie im anderen System so verbunden, dass jeder Figur in Σ_1 eine *congruente* Figur in Σ_2 entspricht.

Ein wesentlicher Unterschied zwischen beiden Auffassungen macht sich noch geltend im Ausdruck der *Gleichheit*. Zwei Bewegungen können sehr verschieden von einander sein und doch die eine durch die andere *ersetzbar* genannt werden, nämlich dann, wenn beide das System aus der Anfangslage auf zwei

verschiedenen Wegen in dieselbe Endlage bringen. Sollen aber zwei Beziehungen (Verwandtschaften) einander gleich sein, so muss durch beide das System Σ_1 in gleicher Weise auf Σ_2 bezogen sein, so dass also zwei Elemente von Σ_1 und Σ_2, die sich vermöge der einen Beziehung entsprechen, es auch vermöge der anderen thun. Dann sind aber die beiden Beziehungen nicht nur durch einander ersetzbar, sondern vollkommen identisch. Und auch bei *Folgen* von Verwandtschaften, denen wir alsbald näher treten werden, kann man statt der Ersetzbarkeit die Gleichheit setzen, falls man das Ergebniss der Folge als Hauptsache, die einzelnen, sie zusammensetzenden Verwandtschaften als Nebensache betrachtet.

32. Durch die Auffassung der Bewegung als Verwandtschaft wird die Möglichkeit zu Erweiterungen gegeben. So kann man sich eine Verwandtschaft zwischen den Punkten des Raumes vorstellen, vermöge welcher, wie bei der vorhin geschilderten Congruenz, alle gegenseitigen Abstände der Punkte des Systems Σ_2 denen der entsprechenden Punkte in Σ_1 gleich geblieben sind, doch so, dass jedem Tetraeder des einen Systems kein congruentes, sondern ein *symmetrisches* des anderen entspricht. Von einem stetigen Uebergang, wie er bei der Bewegung stattfand, kann hier nicht mehr die Rede sein, und in der That gehört diese Verwandtschaft der allgemeinen Theorie der *Spiegelungen* an, in welcher unstetige Operationen, die Spiegelungen an Punkten und Ebenen, als erzeugende Operationen auftreten.

Noch andere Verallgemeinerungen erhalten wir, indem wir weitere Eigenschaften der erst betrachteten Verwandtschaften fallen lassen. Geben wir z. B. die Gleichheit der Theile auf und setzen die Aehnlichkeit an ihre Stelle, oder verlangen wir bloss, dass Punkte, die auf einer Geraden lagen, wieder ebenso liegen, oder sogar nur, dass Punkte, die sich benachbart waren, es bleiben, so gewinnen wir dadurch viel allgemeinere Verwandtschaften. Bei allen den genannten treten die zwei Fälle auf, die wir im vorigen Beispiel als Congruenz und Symmetrie unterschieden, nämlich der eine Fall, wo das erste System durch *stetige Veränderung* in das zweite übergeführt werden kann, und der zweite Fall, wo dies *nicht* möglich ist. Bei ihnen allen werden wir also in gleicher Weise von den Zwischenlagen absehen müssen und sie als *Verwandtschaften* zu betrachten haben.

Solche *Verwandtschaften*, wie sie in den verschiedensten Formen in Erscheinung treten, sind Gegenstand der schönsten und fruchtbarsten Arbeiten eines Möbius gewesen. Sie können alle als Beispiele für die ganz allgemeinen Betrachtungen dienen, die wir jetzt anstellen wollen.

---

33. Wir gehen dazu über, die einfachsten Gesetze über das Rechnen mit Verwandtschaften abzuleiten[1].

A. Erklärungen.

a) Wird ein System[2] Σ_1 durch eine Verwandtschaft $\mathfrak{A}$ in ein System Σ_2 übergeführt, dieses durch eine Verwandtschaft $\mathfrak{B}$ in Σ_3 u. s. f. schliesslich Σ_{n-1} durch eine Verwandtschaft $\mathfrak{K}$ in Σ_n, *so verstehen wir unter der Folge der Verwandtschaften* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \cdots \mathfrak{K}$ *diejenige einzelne Verwandtschaft, welche* Σ_1 *in* Σ_n *überführt.*

Dass das System Σ_1 durch die Verwandtschaft $\mathfrak{A}$ in Σ_2 übergeführt werde, drücken wir in Zeichen aus durch:

$$\Sigma_1 \{ \mathfrak{A} \} \Sigma_2 \ .$$

Die Folge von mehreren Verwandtschaften $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \cdots \mathfrak{K}$ *bezeichnen wir durch Nebeneinanderschreiben* derselben, also durch $\mathfrak{A}\mathfrak{B} \cdots \mathfrak{K}$. Ist also:

$$\Sigma_1 \{ \mathfrak{A} \} \Sigma_2 \{ \mathfrak{B} \} \Sigma_3 \cdots \Sigma_{n-1} \{ \mathfrak{K} \} \Sigma_n \ ,$$

so ist:

$$\Sigma_1 \{ \mathfrak{A}\mathfrak{B} \cdots \mathfrak{K} \} \Sigma_n \ .$$

Demnach sind zwei Folgen von Verwandtschaften einander gleich, wenn sie das System Σ_1 *in dasselbe System* Σ_n *überführen.*

---

1) Diese Rechengesetze werden allenthalben gebraucht, wo man es mit Verknüpfungen zu thun hat. Trotz ihrer Einfachheit müssen sie aber doch einmal bewiesen werden, und da ich nirgends die Beweise gefunden habe, so stelle ich oben die wichtigsten dieser Sätze nebst ihren Beweisen zusammen, sodass ich auch für diesen Aufsatz nur elementare Kenntnisse vorauszusetzen brauche, und zugleich eine Vereinfachung in der Ableitung der Rechengesetze für involutorische Verwandtschaften im folgenden Abschnitt (VII) erziele, der zum vorliegenden Abschnitt ganz parallel verläuft.

2) Unter dem *System* verstehen wir die Gesammtheit aller Elementei die überhaupt der Operation unterzogen werden können, also z. B. be einer räumlichen Punkt-Transformation die Gesammtheit *aller* Punkte des Raumes; dabei werden meist Σ_1 und Σ_2 *dieselbe* Gesammtheit von Elementen umfassen, aber in einer anderen Anordnung.

Ist also: $\Sigma_1 \{ \mathfrak{A}\mathfrak{B} \cdot\cdot \mathfrak{K} \} \Sigma_n$

und: $\Sigma_1 \{ \mathfrak{L}\mathfrak{M} \cdot\cdot \mathfrak{P} \} \Sigma_n$,

so ist: $\mathfrak{A}\mathfrak{B} \cdot\cdot \mathfrak{K} = \mathfrak{L}\mathfrak{M} \cdot\cdot \mathfrak{P} = \mathfrak{R}$,

wenn $\mathfrak{R}$ die einzelne Verwandtschaft ist, zu welcher sich die übrigen in ihrer Folge zusammensetzen.

b) *Die Verwandtschaft, welche das System, Element für Element, in sich überführt, heisst die identische Verwandtschaft (Identität).*

Wir bezeichnen[1]) *sie mit* 1.

Es ist also:

$$\Sigma_1 \{ 1 \} \Sigma_1 , \quad \Sigma_2 \{ 1 \} \Sigma_2 \quad \text{u. s. f.}$$

Aus: $\Sigma_1 \{ 1 \} \Sigma_1 \{ \mathfrak{A} \} \Sigma_2$

und aus: $\Sigma_1 \{ \mathfrak{A} \} \Sigma_2 \ \{ 1 \} \Sigma_2$

folgen dann die Formeln:

$$1\,\mathfrak{A} = \mathfrak{A} , \quad \mathfrak{A}\,1 = \mathfrak{A} ,$$

für jede beliebige Verwandtschaft $\mathfrak{A}$.

c) *Führt eine Verwandtschaft $\mathfrak{A}$ das System Σ_1 in Σ_2 über, so nennen wir diejenige Verwandtschaft, welche Σ_2 in Σ_1 überführt, die Umkehrung der ersten.*

Wir bezeichnen[2]) *die Umkehrung*[3]) *von $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{A}^{-1}$.*

Es ist also:

$$\Sigma_1 \{ \mathfrak{A} \} \Sigma_2 \{ \mathfrak{A}^{-1} \} \Sigma_1 ,$$

d. h.: $\mathfrak{A}\mathfrak{A}^{-1} = 1$.

Umgekehrt erhalten wir den

Satz. *Ist eine Verwandtschaft $\mathfrak{A}'$ so beschaffen, dass*

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}' = 1 ,$$

so ist $\mathfrak{A}'$ die Umkehrung von $\mathfrak{A}$.

---

1) und 2) Diese Bezeichnungsweisen folgen nothwendig aus der Schreibweise der Folge, welche sie formal als *Product* erscheinen lässt. H. Grassmann hat (Ausdehnungslehre 1844, § 6 und 9) Kennzeichen dafür angegeben, ob eine Verknüpfung von Operationen als *Addition* oder als *Multiplication* aufzufassen ist. Wir haben unbeschadet der im einzelnen Falle noch zu treffenden Entscheidung die Folge allgemein in der Form eines Productes geschrieben, wie dies auch sonst gebräuchlich ist.

3) Solche Beziehungen, bei denen sich eine Umkehrung nicht bilden lässt, sind also von der Betrachtung ausgeschlossen; ebenso diejenigen, bei denen sich nicht aus je zweien eine einzige neue als ihre Folge bilden lässt.

Denn es ist dann:

$$\Sigma_1 \{ \mathfrak{A}\mathfrak{A}' \} \Sigma_1 \ ,$$

also: $$\Sigma_1 \{ \mathfrak{A} \} \Sigma_2 \{ \mathfrak{A}' \} \Sigma_1 \ ,$$

ferner: $$\Sigma_2 \{ \mathfrak{A}^{-1} \} \Sigma_1 \ ,$$

also nach a): $$\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}^{-1} \ .$$

Zusatz. *Die Identität ist ihre eigene Umkehrung.*

Denn setzt man in der Gleichung $\mathfrak{A}\mathfrak{A}^{-1} = 1$ für $\mathfrak{A}$ die 1, so erhält man $\mathfrak{A}^{-1} = 1$.

B. Das associative Gesetz.

34. **Satz.** *Für die Folge dreier Verwandtschaften gilt stets das associative Gesetz:*

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B})\,\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\,(\mathfrak{B}\mathfrak{C}) \ .$$

Beweis: Ist:

$$\Sigma_1 \{ \mathfrak{A} \} \Sigma_2 \{ \mathfrak{B} \} \Sigma_3 \{ \mathfrak{C} \} \Sigma_4 \ ,$$

so lässt sich dies auch schreiben (33a.):

$$\Sigma_1 \{ \mathfrak{A}\mathfrak{B} \} \Sigma_3 \{ \mathfrak{C} \} \Sigma_4 \ , \qquad \Sigma_1 \{ \mathfrak{A} \} \Sigma_2 \{ \mathfrak{B}\mathfrak{C} \} \Sigma_4$$

oder: $$\Sigma_1 \{ (\mathfrak{A}\mathfrak{B})\mathfrak{C} \} \Sigma_4 \ , \qquad \Sigma_1 \{ \mathfrak{A}\,(\mathfrak{B}\mathfrak{C}) \} \Sigma_4 \ ,$$

was sich (33a.) mit der Aussage des Satzes deckt.

Durch Wiederholung desselben Verfahrens[1]) erhalten wir das associative Gesetz für eine *beliebige* Anzahl von Verwandtschaften, welches auch so ausgesprochen werden kann:

Zusatz. *Bei einer Folge von mehreren Verwandtschaften lassen sich aufeinander folgende — ohne Aenderung der Reihenfolge — beliebig in Klammern schliessen, oder auch alle Klammern weglassen.*

Folgerung I. *Kommen in einer Folge von Verwandtschaften eine derselben und ihre Umkehrung unmittelbar nach einander vor, so können beide weggelassen werden.*

Denn es ist:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}\cdot\cdot\,\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{C}^{-1}\mathfrak{D}\cdot\cdot\,\mathfrak{E} &= \mathfrak{A}\cdot\cdot\,\mathfrak{B}\,(\mathfrak{C}\mathfrak{C}^{-1})\,\mathfrak{D}\cdot\cdot\,\mathfrak{E} \ , \\ &= \mathfrak{A}\cdot\cdot\,\mathfrak{B}\,1\,\mathfrak{D}\cdot\cdot\,\mathfrak{E} && \text{(nach 33c.)}, \\ &= \mathfrak{A}\cdot\cdot\,(\mathfrak{B}\,1)\,\mathfrak{D}\cdot\cdot\,\mathfrak{E}, \\ &= \mathfrak{A}\cdot\cdot\,\mathfrak{B}\mathfrak{D}\cdot\cdot\,\mathfrak{E} && \text{(nach 33b.)}, \end{aligned}$$

w. z. b. w.

---

1) Die allgemeine Herleitung dieses Satzes für *n* Glieder, wenn er für drei gilt, findet sich bei H. GRASSMANN, Ausdehnungslehre 1844, § 3.

Fügt man einer Folge von Verwandtschaften

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\cdot\cdot\mathfrak{L}\mathfrak{M} = \mathfrak{T}$$

die umgekehrte Folge ihrer Umkehrungen

$$\mathfrak{M}^{-1}\mathfrak{L}^{-1}\cdot\cdot\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{T}'$$

hinzu, so erhält man:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\cdot\cdot\mathfrak{L}\mathfrak{M}\mathfrak{M}^{-1}\mathfrak{L}^{-1}\cdot\cdot\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}^{-1} = 1 \ ,$$

da zuerst $(\mathfrak{M}\mathfrak{M}^{-1})$ in der Mitte wegbleiben kann, sodann auch $(\mathfrak{L}\mathfrak{L}^{-1})$ u. s. f., und schliesslich $\mathfrak{A}\mathfrak{A}^{-1} = 1$ bleibt. Daher ist:

$$\mathfrak{T}\mathfrak{T}' = 1 \ ,$$

also (33c., Satz):

$$\mathfrak{T}' = \mathfrak{T}^{-1} \ ; \qquad \text{d. h.:}$$

Folgerung II. *Man erhält die Umkehrung einer Folge von Verwandtschaften, indem man die umgekehrte Folge ihrer Umkehrungen bildet.*

C. Verbindung und Umformung der Gleichungen.

35. **Satz.** *Ist* $\mathfrak{A}\cdot\cdot\mathfrak{B} = \mathfrak{E}\cdot\cdot\mathfrak{F}$

und $\mathfrak{C}\cdot\cdot\mathfrak{D} = \mathfrak{G}\cdot\cdot\mathfrak{H}$,

so ist auch $\mathfrak{A}\cdot\cdot\mathfrak{B}\mathfrak{C}\cdot\cdot\mathfrak{D} = \mathfrak{E}\cdot\cdot\mathfrak{F}\mathfrak{G}\cdot\cdot\mathfrak{H}$.

Denn führt die Folge $\mathfrak{A}\cdot\cdot\mathfrak{B}$ das System Σ_1 in Σ_2, die Folge $\mathfrak{C}\cdot\cdot\mathfrak{D}$ dieses in Σ_3 über, so ist:

$$\Sigma_1\{\mathfrak{A}\cdot\cdot\mathfrak{B}\}\Sigma_2 \ , \quad \Sigma_1\{\mathfrak{E}\cdot\cdot\mathfrak{F}\}\Sigma_2 \ ,$$

$$\Sigma_2\{\mathfrak{C}\cdot\cdot\mathfrak{D}\}\Sigma_3 \ , \quad \Sigma_2\{\mathfrak{G}\cdot\cdot\mathfrak{H}\}\Sigma_3 \ ,$$

also: $\Sigma_1\{\mathfrak{A}\cdot\cdot\mathfrak{B}\mathfrak{C}\cdot\cdot\mathfrak{D}\}\Sigma_3 \ , \quad \Sigma_1\{\mathfrak{E}\cdot\cdot\mathfrak{F}\mathfrak{G}\cdot\cdot\mathfrak{H}\}\Sigma_3$,

woraus der Satz folgt.

Fügt man so zu einer gegebenen Gleichung

$$\mathfrak{A}\cdot\cdot\mathfrak{B} = \mathfrak{E}\cdot\cdot\mathfrak{F}$$

noch die stets richtige Gleichung hinzu:

$$\mathfrak{C}\cdot\cdot\mathfrak{D} = \mathfrak{C}\cdot\cdot\mathfrak{D} \ ,$$

so erhält man, je nachdem man sie als zweite oder erste Gleichung in der Zusammensetzung nimmt:

$$\mathfrak{A}\cdot\cdot\mathfrak{B}\mathfrak{C}\cdot\cdot\mathfrak{D} = \mathfrak{E}\cdot\cdot\mathfrak{F}\mathfrak{C}\cdot\cdot\mathfrak{D}$$

oder: $\mathfrak{C}\cdot\cdot\mathfrak{D}\mathfrak{A}\cdot\cdot\mathfrak{B} = \mathfrak{C}\cdot\cdot\mathfrak{D}\mathfrak{E}\cdot\cdot\mathfrak{F}$, d. h.:

Zusatz I. *Man kann in einer Gleichung zwischen Verwandtschaften eine beliebige Anzahl von Verwandtschaften auf beiden Seiten vorn, oder auf beiden Seiten hinten in derselben Reihenfolge hinzufügen.*

Fügt man so in der Gleichung

$$\mathfrak{A} \,..\, \mathfrak{B} = \mathfrak{E} \,..\, \mathfrak{F}$$

auf beiden Seiten die Umkehrung der rechts stehenden Folge, also (vgl. 34, Folgerung II) die Folge $\mathfrak{F}^{-1} \,..\, \mathfrak{E}^{-1}$ hinten bei, so wird:

$$\mathfrak{A} \,..\, \mathfrak{B}\mathfrak{F}^{-1} \,..\, \mathfrak{E}^{-1} = 1 \ , \qquad \text{d. h..}$$

Zusatz II. *Man kann jede Gleichung zwischen Verwandtschaften so umformen, dass auf der einen Seite der Gleichung die identische Verwandtschaft steht.*

Ist nun eine Gleichung zwischen n Verwandtschaften auf diese Form gebracht, also:

$$\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \,..\, \mathfrak{A}_{n-1} \mathfrak{A}_n = 1 \ ,$$

und man fügt auf beiden Seiten vorn $\mathfrak{A}_n$ und hinten $\mathfrak{A}_n^{-1}$ bei, so erhält man:

$$\mathfrak{A}_n \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \,..\, \mathfrak{A}_{n-1} \mathfrak{A}_n \mathfrak{A}_n^{-1} = \mathfrak{A}_n \mathfrak{A}_n^{-1}$$

oder:

$$\mathfrak{A}_n \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \,..\, \mathfrak{A}_{n-1} = 1 \ .$$

Und ebenso erhält man daraus:

$$\mathfrak{A}_{n-1} \mathfrak{A}_n \mathfrak{A}_1 \,..\, \mathfrak{A}_{n-2} = 1 \ , \quad \text{u. s. f.}$$

Fügt man noch auf beiden Seiten der gegebenen Gleichung die Umkehrung der linken Seite hinzu, so wird:

$$1 = \mathfrak{A}_n^{-1} \mathfrak{A}_{n-1}^{-1} \,..\, \mathfrak{A}_2^{-1} \mathfrak{A}_1^{-1} \ , \qquad \text{d. h.:}$$

Zusatz III. *Ist eine Gleichung zwischen Verwandtschaften so umgeformt, dass auf der einen Seite die identische Verwandtschaft steht, so kann man der anderen Seite* $2n$ *verschiedene Gestalten geben, indem man mit ihr und ihrer Umkehrung alle cyclischen Vertauschungen vornimmt.*

D. Die Ueberführung von Verwandtschaften.

36. Es sei durch eine Verwandtschaft $\mathfrak{A}$ ein System Σ_1 in ein System Σ_2 übergeführt. Werden nun die beiden Systeme Σ_1 und Σ_2 gleichzeitig einer einzigen Verwandtschaft $\mathfrak{B}$ unterworfen, so wird durch $\mathfrak{B}$ das System Σ_1 etwa in das System Σ_1'

und Σ_2 in Σ_2' übergeführt werden. Bezeichnen wir dann eine Verwandtschaft, welche Σ_1' in Σ_2' überführt, durch $\mathfrak{A}'$, und bedenken, dass die beiden Systeme Σ_1 und Σ_2, deren Beziehung die Verwandtschaft $\mathfrak{A}$ vermittelt, durch $\mathfrak{B}$ in die beiden Systeme Σ_1' und Σ_2' übergeführt werden, deren Beziehung $\mathfrak{A}'$ vermittelt, so können wir sagen: *Es wird die Verwandtschaft* $\mathfrak{A}$ *durch die Verwandtschaft* $\mathfrak{B}$ *in die Verwandtschaft* $\mathfrak{A}'$ *übergeführt.*

Wegen der Wichtigkeit dieses Begriffs will ich ihn durch das Beispiel der Bewegung eines starren Körpers der Vorstellung etwas näher bringen, indem ich auf den landläufigen Begriff der Bewegung zurückgreife.

Wir können uns eine Bewegung $\mathfrak{B}$ vorstellen, welche zu gleicher Zeit zwei mit einander starr verbundene Körper Σ_1 und Σ_2 erfasst, und sie mit den Körpern Σ_1' und Σ_2' zur Deckung bringt. Wenn aber der Körper Σ_1 mit dem Körper Σ_2 congruent ist, also auch Σ_1' mit Σ_2', so giebt es eine bestimmte Schraubung $\mathfrak{A}$, welche Σ_1 mit Σ_2 zur Deckung bringt, andererseits aber auch eine Schraubung $\mathfrak{A}'$, welche Σ_1' mit Σ_2' zur Deckung bringt, so dass durch $\mathfrak{B}$ nicht nur Σ_1 und Σ_2 in Σ_1' und Σ_2', sondern auch die Schraubung $\mathfrak{A}$ in die Schraubung $\mathfrak{A}'$ übergeführt wird.

Man sieht[1]), dass in dem starren System, welches Σ_1 und Σ_2 umfasst, die Schraubung $\mathfrak{A}$ genau so verlaufen muss, wie $\mathfrak{A}'$ in dem starren System von Σ_1' und Σ_2'. Aber *gleich* im Sinne der Ersetzbarkeit können die in einander überführbaren Schraubungen *nicht* genannt werden, obwohl sie congruent sind.

Kleiden wir diese Betrachtungen für den Fall der allgemeinen Verwandtschaften in Formeln, so können wir schreiben:

$$\Sigma_1 \{\mathfrak{A}\} \Sigma_2$$
$$\Sigma_1 \{\mathfrak{B}\} \Sigma_1' , \qquad \Sigma_2 \{\mathfrak{B}\} \Sigma_2'$$
$$\Sigma_1' \{\mathfrak{A}'\} \Sigma_2' .$$

Diese vier Formeln lassen sich (unter Berücksichtigung von 33c) in eine Reihe schreiben:

$$\Sigma_1 \{\mathfrak{A}\} \Sigma_2 \{\mathfrak{B}\} \Sigma_2' \{\mathfrak{A}'^{-1}\} \Sigma_1' \{\mathfrak{B}^{-1}\} \Sigma_1 ,$$

oder:
$$\Sigma_1 \{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{A}'^{-1}\mathfrak{B}^{-1}\} \Sigma_1 ,$$

also (33b):
$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{A}'^{-1}\mathfrak{B}^{-1} = 1 ,$$

1) Man vergleiche C. Jordan, Annali di Matematica, Serie II, II 171.

oder wenn man auf beiden Seiten (nach 35, Zusatz I) die Folge $\mathfrak{B}\mathfrak{A}'$ hinten hinzufügt (wegen 34, Folgerung I):

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}' .$$

Ist umgekehrt diese Gleichung gegeben, so folgen die eben benutzten Formeln genau in der umgekehrten Ordnung aus der letzten, und die ersten Formeln sagen dann aus, dass die Verwandtschaft $\mathfrak{A}$ durch die Verwandtschaft $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{A}'$ übergeführt werde.

Satz. *Wird eine Verwandtschaft $\mathfrak{A}$ durch eine Verwandtschaft $\mathfrak{B}$ in eine Verwandtschaft $\mathfrak{A}'$ übergeführt, so ist:*

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}' .$$

Und umgekehrt: Gilt diese Gleichung, so wird $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{A}'$ übergeführt.

Fügt man der Gleichung beiderseits vorn, bezw. hinten, die Verwandtschaft $\mathfrak{B}^{-1}$ bei, so erhält man:

$$\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{A}' ; \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}'\mathfrak{B}^{-1} , \qquad \text{d. h.:}$$

Zusatz. *Ist eine Verwandtschaft $\mathfrak{A}$ gegeben, so ist diejenige Verwandtschaft $\mathfrak{A}'$, in welche sie durch eine weitere Verwandtschaft $\mathfrak{B}$ übergeführt wird, gleich $\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{B}$.*

Ist $\mathfrak{A}'$ gegeben, so ist die Verwandtschaft $\mathfrak{A}$, welche durch $\mathfrak{B}$ in sie übergeführt wird, gleich $\mathfrak{B}\mathfrak{A}'\mathfrak{B}^{-1}$.

37. **Satz.** *Werden durch eine Verwandtschaft $\mathfrak{B}$ zwei Verwandtschaften $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ in die Verwandtschaften $\mathfrak{A}_1'$, $\mathfrak{A}_2'$ übergeführt, so wird die Folge der ersteren in die Folge der letzteren übergeführt.*

Die Verwandtschaften

$$\mathfrak{A}_1 , \quad \mathfrak{A}_2 , \quad \mathfrak{A}_{12} = \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$$

werden durch die Verwandtschaft $\mathfrak{B}$ übergeführt (nach 36, Zusatz) in:

$$\mathfrak{A}_1' = \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B} , \quad \mathfrak{A}_2' = \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}_2\mathfrak{B} , \quad \mathfrak{A}_{12}' = \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{B} .$$

Dann wird:

$$\mathfrak{A}_1'\mathfrak{A}_2' = \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}_2\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{B} = \mathfrak{A}_{12}' ,$$

w. z. b. w.

Zusatz. *Dasselbe gilt für die Folge einer beliebigen Anzahl von Verwandtschaften.*

Der Beweis wird wie vorhin geführt.

38. **Satz.** *Besteht zwischen zwei Folgen von Verwandtschaften eine Gleichung, so besteht sie in derselben Weise zwischen den Verwandtschaften, in welche die ersten durch eine beliebige Verwandtschaft $\mathfrak{B}$ übergeführt werden* [1]).

Die zwischen den gegebenen Verwandtschaften bestehende Gleichung lässt sich (35, Zusatz II) auf die Form bringen:

$$\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \,..\, \mathfrak{A}_{n-1} \mathfrak{A}_n = 1 \;.$$

Dann ist zu beweisen, dass auch:

$$\mathfrak{A}_1' \mathfrak{A}_2' \,..\, \mathfrak{A}_{n-1}' \mathfrak{A}_n' = 1 \;,$$

wenn $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \,..\, \mathfrak{A}_{n-1}, \mathfrak{A}_n$ durch $\mathfrak{B}$ bezw. in $\mathfrak{A}_1', \mathfrak{A}_2', \,..\, \mathfrak{A}_{n-1}'$, $\mathfrak{A}_n'$ übergeführt werden.

Es ist (nach 36. Zusatz):

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_1' \mathfrak{A}_2' \,..\, \mathfrak{A}_{n-1}' \mathfrak{A}_n' &= (\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B})(\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}) \,..\, (\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}_{n-1}\mathfrak{B})(\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}_n\mathfrak{B}) \\ &= \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2 \,..\, \mathfrak{A}_{n-1}\mathfrak{A}_n\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^{-1}\,1\,\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{B} = 1 \;.\end{aligned}$$

Zusatz. *Weiss man, dass zwei Folgen von Verwandtschaften einander nicht gleich sind, so können auch die entsprechenden Folgen derjenigen Verwandtschaften, in welche die ersten durch irgend eine Verwandtschaft $\mathfrak{B}$ übergehen, nicht gleich sein.*

Denn wären die letzten Folgen einander gleich, so müssten auch diejenigen, in welche sie durch $\mathfrak{B}^{-1}$ übergeführt werden, d. h. die gegebenen Folgen, einander gleich sein.

Da das gewöhnliche Zeichen der Ungleichheit $\gtreqless$ hier, wo von grösser und kleiner nicht die Rede ist, nicht angewandt werden kann, so gebrauchen wir das Zeichen »ungleich« $\neq$ und schreiben:

$$\mathfrak{A} \neq \mathfrak{B} \;,$$

um auszudrücken, dass die Verwandtschaft $\mathfrak{A}$ von der Verwandtschaft $\mathfrak{B}$ verschieden sei.

Anmerkung. Folgt allgemeiner aus irgend einer Gleichung eine zweite und auch umgekehrt aus der zweiten die erste, so bleibt (aus demselben Grunde, wie im Zusatz) diese Abhängigkeit auch richtig, wenn man Ungleichheitszeichen statt der beiden Gleichheitszeichen setzt.

---

1) *Jede Gleichung zwischen Folgen von Verwandtschaften besitzt also hinsichtlich jeder Verwandtschaft (Transformation), welche jene Verwandtschaften in andere überführen, die wichtige Eigenschaft, die man als* I n v a r i a n z *bezeichnet.*

E. Vertauschbarkeit von Verwandtschaften.

39. **Erklärung.** *Zwei Verwandtschaften* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *heissen vertauschbar, wenn die Folge der ersten und der zweiten gleich der Folge der zweiten und der ersten ist, also wenn:*

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A} .$$

Satz. *Sind zwei Verwandtschaften vertauschbar, so wird jede derselben durch die andere in sich übergeführt.*

Denn einerseits drückt die obige Gleichung

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}$$

aus, dass $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{A}$, d. h. in sich, übergeht (36, Satz), und dieselbe Gleichung in der Form

$$\mathfrak{B}\mathfrak{A} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$$

geschrieben, drückt aus, dass $\mathfrak{B}$ durch $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}$, d. h. in sich, übergeht.

Umkehrung. *Wenn eine Verwandtschaft durch eine zweite in sich übergeführt wird, so wird auch die zweite durch die erste in sich übergeführt, und die beiden Verwandtschaften sind vertauschbar.*

Denn jede dieser Aussagen deckt sich mit der oben angeschriebenen Gleichung.

VII. Das Rechnen mit involutorischen Verwandtschaften[1].

40. Die so einfachen Gesetze für das Rechnen mit Verwandtschaften erleiden für den Fall der *involutorischen* Ver-

---

1) Die involutorischen Verwandtschaften spielen seit den grundlegenden Arbeiten von Möbius und v. Staudt eine wichtige Rolle in der Geometrie. Ersterer war vom Begriff der *Symmetrie* (an Ebenen, Punkten, Geraden) ausgegangen, wie er sich in der Lehre von den Krystallen entwickelt hatte, und zeigte, wie sich dieser Begriff nach verschiedenen Seiten hin verallgemeinern lässt, und zuletzt auf die involutorische Collineation führt. Man vergleiche die Aufsätze in Möbius' ges. Werken II 349 (1849); II 361 (1851); II 409 (1856); besonders aber: »Ueber Erweiterungen des Begriffs der Involution von Punkten« II 373 (1855). Ebenso hat er in der Theorie der Kreisverwandtschaften die involutorischen unter diesen mit besonderer Ausführlichkeit behandelt: II 219 (1853); II 243 (1855), bes. § 20—23.

v. Staudt hat schon vor Möbius die involutorische Collineation abgeleitet, und zwar in rein geometrischer Weise, Geometrie der Lage (1847)

wandtschaften noch weitere Vereinfachungen, die, wie ich glaube, schon an und für sich den Standpunkt [1]) rechtfertigen werden, den ich in den vorigen und folgenden Aufsätzen vertrete. Dieser Standpunkt lässt sich kurz so bezeichnen:

Wo es auch immer möglich ist, in einer bestimmten Klasse von Verwandtschaften eine jede als Folge von involutorischen Verwandtschaften aufzufassen, ist die Theorie dieser allgemeineren Verwandtschaften auf diejenige der sie zusammensetzenden involutorischen Verwandtschaften aufzubauen [2]).

---

§ 17, und auch die Polarsysteme 2. Ordnung als involutorische Verwandtschaften aufgefasst, ebenda § 18.

Nehmen wir noch dazu die quadratische Verwandtschaft, welche jedem Punkt der Ebene denjenigen anderen zuordnet, der ihm in zwei Polarsystemen zugleich conjugirt ist (vgl. z. B. v. Staudt, Beiträge (1856) § 23 u. 24), so haben wir damit die allgemeiner bekannt gewordenen involutorischen Verwandtschaften aufgezählt.

1) Es ist von Interesse, zu bemerken, dass während für die weittragenden Lie'schen Theorien das *Stetige* (in den infinitesimalen Transformationen) die Grundlage bildet, für das engere oben umgrenzte Gebiet das *Diskrete* (in den involutorischen Verwandtschaften) in den Vordergrund tritt.

2) Nachdem ich von der Betrachtung einer Projectivität als Folge zweier Involutionen (vgl. meine Habilitationsschrift: »Rein geometrische Theorie etc.« Darmstadt 1885 § 12) und späterhin der ebenen Collineation als Folge zweier quadratischen Verwandtschaften ausgegangen war, erhielt ich die Ueberzeugung von der Allgemeinheit dieser Methode erst, als ich (im vorigen Herbst) einerseits auf Anregung der Arbeiten von Schönfliess über die Krystallsysteme versuchte, die Grundlagen der Kinematik, unter Hinzuziehung der symmetrischen Systeme einheitlicher zu gestalten, und andererseits (für ein Colleg über conforme Abbildung W. S. 89/90) mir die Theorie der Kreisverwandtschaften in rein geometrischer Weise zurecht legte. Ich fand, dass jede dieser Verwandtschaften als Folge zweier involutorischen Verwandtschaften dargestellt werden kann, und dass diese Darstellung besonderen Vortheil für die Zusammensetzung zweier der allgemeinen Verwandtschaften bietet (vgl. Art. 11).

Wie ich durch die Güte des Herrn W. Fiedler erfahre, hat schon vor mir und vor Burnside (vgl. Art. 25) Halphen die Zusammensetzung zweier Schraubungen geleistet [Nouv. Ann. de Math. III. Serie, I 296—299 (1882)], und zwar in ganz analoger Weise, wie ich es später, unabhängig davon, gethan habe. Doch obgleich er die Zerlegung der Schraubenbewegung in zwei Umwendungen (vgl. Art. 10 meiner Arbeit) zu seiner Construction benützt, so schliesst er den Satz, dass jede Bewegung durch eine Schraubung zu ersetzen ist, nicht, wie es nun nahe gelegen hätte, daraus, dass jede Bewegung aus zwei Umwendungen zusammengesetzt werden kann (Art. 17 meiner Arbeit), sondern daraus, dass jede Bewegung durch zwei Schraubungen ersetzt werden kann, die sich (nach der Construction) zu einer einzigen vereinigen.

A. Erklärung.

41. *Unter einer involutorischen Verwandtschaft*[1]) *verstehen wir* (4.) *eine solche nicht identische Verwandtschaft*[2]), *die zwei Mal hinter einander angewandt die identische Verwandtschaft ergiebt.*

Eine Verwandtschaft s ist also involutorisch, wenn:

$$s^2 = 1 \, , \quad s \neq 1 \, ,$$

(wo wir s^2 für ss schreiben).

Fügt man der Gleichung:

$$ss = 1$$

beiderseits die Verwandtschaft s^{-1} hinzu, so erhält man (wegen $ss^{-1} = 1$): $s = s^{-1}$.

Hat man umgekehrt eine Verwandtschaft $\mathfrak{A}$, für welche

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^{-1}$$

ist, so folgt daraus durch beiderseitige Hinzufügung von $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{A}^2 = 1 \; ;$$

$\mathfrak{A}$ ist also — wenn es nicht die identische Verwandtschaft ist — eine involutorische Verwandtschaft. D. h.:

Satz. *Jede involutorische Verwandtschaft ist gleich ihrer Umkehrung.*

Umkehrung. *Jede nicht identische Verwandtschaft, die ihrer Umkehrung gleich ist, ist involutorisch.*

Wenn man bedenkt, wie wichtig für alle mathematischen Operationen die Frage nach der Umkehrung ist, wie sie z. B. bei

---

Ist so einerseits einfaches auf weitläufigeres aufgebaut, so geht andererseits daraus hervor, dass bei Halphen die Umwendung nicht grundsätzlich als erzeugende Operation auftritt.

1) Es ist vielleicht angebracht, die »involutorische Verwandtschaft« kurz als »Spiegelung« zu bezeichnen, und zwar für gleiche räumliche Systeme zu sagen: Sp. an einer Ebene, an einem Punkt, an einer Geraden (Umwendung); für Punktepaare, die durch zwei feste Punkte harmonisch getrennt sind: Sp. am Punktepaar (harmonische Spiegelung); für eine involutorische Kreisverwandtschaft: Kreisspiegelung; ferner projective Sp. (Involution); Collineare Sp. u. s. f.

2) Würden wir die Identität ebenfalls als involutorische Verwandtschaft rechnen, so wäre es unmöglich, Klassen zu bilden (wie das im VIII. Abschnitt geschieht), die z. B. aus solchen Verwandtschaften bestehen, die sich aus je zwei involutorischen zusammensetzen, ohne dass die involutorischen selbst zur Klasse gehörten (denn es wäre s die Folge von s und 1).

den arithmetischen Operationen Addition, Multiplication u. s. w. die Einführung neuer Zahlgrössen (der negativen, gebrochenen u. s. w.) nöthig macht, so erhält man einen Begriff von der Tragweite dieser Eigenschaft, welche bewirkt, dass jede solche Verwandtschaft schon selbst das leistet, was von ihrer Umkehrung verlangt wird.

Wir gehen dazu über, die Sätze des vorigen Kapitels auf die involutorischen Verwandtschaften anzuwenden.

B. Folgerungen des associativen Gesetzes.

42. Aus 34, Folgerung I erhalten wir vermittelst des vorigen Satzes:

Satz. *Kommen in einer Folge von Verwandtschaften zwei gleiche involutorische Verwandtschaften unmittelbar nach einander, so können sie weggelassen werden.*

Es ist also:

$$\mathfrak{A} s s \mathfrak{B} = \mathfrak{A}\mathfrak{B} \quad \text{u. s. w.}$$

Ebenso ergiebt sich aus 34, Folgerung II der

Zusatz. *Man erhält die Umkehrung einer Folge, die aus lauter involutorischen Verwandtschaften besteht, indem man ihre umgekehrte Folge bildet.*

Ist also: $st \,..\, uv = \mathfrak{R}$,

so ist: $vu \,..\, ts = \mathfrak{R}^{-1}$.

C. Umformung der Gleichungen.

43. Fügt man in einer Gleichung:

$$s\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \text{ oder } \mathfrak{C} t = \mathfrak{D}$$

beiderseits die Verwandtschaft s vorn, bezw. t hinten hinzu, so wird (wegen $s^2 = 1$ und $t^2 = 1$):

$$\mathfrak{A} = s\mathfrak{B}, \quad \mathfrak{C} = \mathfrak{D} t, \qquad \text{d. h.:}$$

Satz. *Steht in einer Gleichung von Verwandtschaften auf der einen Seite am Anfang — oder am Ende — eine involutorische Verwandtschaft, so kann sie von da auf die andere Seite an den Anfang — bezw. das Ende — hinübergeschrieben werden.*

D. Die Ueberführung und die harmonischen Verwandtschaften.

44. Bei der Allgemeinheit und grundlegenden Einfachheit der vorigen Betrachtungen ist zu vermuthen, dass diejenigen Begriffe, die sich aus ihnen unmittelbar ergeben, von besonderer Wichtigkeit sein müssen. Das bestätigt sich bei dem Begriff, den wir jetzt ableiten wollen, nämlich bei dem der *harmonischen Verwandtschaften* [1]), welcher in der Geometrie von weittragender Bedeutung ist.

Nehmen wir an, es sei irgend eine Verwandtschaft $\mathfrak{A}$ gegeben, so können wir irgend eine involutorische Verwandtschaft s mit ihr zusammensetzen; d. h. wir bilden eine neue Verwandtschaft $\mathfrak{B}$, welche bestimmt ist durch:

$$s\mathfrak{A} = \mathfrak{B}\,,$$

woraus dann folgt (43.):

$$\mathfrak{A} = s\mathfrak{B}\,.$$

Dadurch haben wir eine Beziehung zwischen den beiden Verwandtschaften $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ erhalten, welche *wechselseitig* ist, indem $\mathfrak{B}$ aus $\mathfrak{A}$ auf dieselbe Weise folgt, wie $\mathfrak{A}$ aus $\mathfrak{B}$.

Aus den beiden Gleichungen folgt (35, Zusatz I):

$$s = \mathfrak{B}\mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1}\,.$$

Diese letzte Gleichung lässt sich (35, Zusatz III) in vier verschiedenen Weisen auf die Form bringen, dass auf der einen Seite die Identität steht:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1} = 1\,, \quad \mathfrak{B}\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{B}\mathfrak{A}^{-1} = 1\,,$$
$$\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{B}\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{B} = 1\,, \quad \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A} = 1\,,$$

oder [2]):

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1})^2 = 1\,,\ (\mathfrak{B}\mathfrak{A}^{-1})^2 = 1\,,\ (\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{B})^2 = 1\,,\ (\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A})^2 = 1\,.$$

---

1) Der Name ist daher genommen, dass wenn zwei Punktepaare harmonisch sind, die beiden Involutionen, deren Doppelpunkte sie sind, die oben abgeleitete Eigenschaft besitzen.

2) Diese Beziehungen hat C. STEPHANOS [Math. Ann. XXII 320 (1883)] für Projectivitäten aufgestellt und C. SEGRE (Journ. f. Math. C 316—330) zur Bildung der Büschel von Projectivitäten verwandt. Diese letztere Arbeit war nicht ohne Einfluss auf die Gestaltung der oben entwickelten Analysis.

»Harmonisch« ist für Projectivitäten identisch mit »apolar«, sonst aber sind es verschiedene Begriffe.

Erklärung. *Wir nennen zwei von einander verschiedene Verwandtschaften* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *zu einander harmonisch, wenn eine der Gleichungen gilt:*

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1})^2 = 1\ , \quad (\mathfrak{B}\mathfrak{A}^{-1})^2 = 1\ , \quad (\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{B})^2 = 1\ , \quad (\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A})^2 = 1\ .$$

Aus jeder dieser Gleichungen folgen die drei übrigen.

Die Voraussetzung der Verschiedenheit der beiden Verwandtschaften können wir schreiben:

$$\mathfrak{A} \neq \mathfrak{B}\ ,$$

oder:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1} \neq 1\ , \quad \mathfrak{B}\mathfrak{A}^{-1} \neq 1\ , \quad \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{B} \neq 1\ , \quad \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A} \neq 1\ .$$

So erhalten wir als *Bedingungen der harmonischen Beziehung:*

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1})^2 = 1\ , \quad \mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1} \neq 1 \quad \text{u. s. w.}$$

Nun folgt aus diesen beiden letzten Formeln auch umgekehrt, dass die Verwandtschaft $\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1}$ involutorisch, also ihrer Umkehrung $\mathfrak{B}\mathfrak{A}^{-1}$ gleich sei, und dasselbe gilt von $\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{B}$ und ihrer Umkehrung $\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}$. Jene haben wir mit s bezeichnet, diese können wir s' nennen, d. h.:

$$s = \mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}^{-1}\ ,$$
$$s' = \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}\ .$$

Daraus folgt (35, Zusatz I):

$$\mathfrak{B} = s\mathfrak{A} = \mathfrak{A}s'\ ,$$
$$\mathfrak{A} = s\mathfrak{B} = \mathfrak{B}s'\ .$$

Diese Gleichungen sagen nun aus (36.), dass durch die Verwandtschaft $\mathfrak{A}$ sowohl, wie durch $\mathfrak{B}$, die involutorische Verwandtschaft s in s' übergeführt werde.

Satz. *Sind zwei Verwandtschaften* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *harmonisch, so giebt es eine involutorische Verwandtschaft* s*, welche sowohl durch* $\mathfrak{A}$*, wie durch* $\mathfrak{B}$ *in eine und dieselbe involutorische Verwandtschaft* s' *übergeführt wird.*

45. **Satz.** *Sind* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *harmonische Verwandtschaften, so sind auch* $\mathfrak{C}\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{C}\mathfrak{B}$ *und ebenso* $\mathfrak{A}\mathfrak{D}$ *und* $\mathfrak{B}\mathfrak{D}$ *harmonisch, wo* $\mathfrak{C}$ *und* $\mathfrak{D}$ *beliebige weitere Verwandtschaften sind* [1].

Denn es ist:

$$(\mathfrak{C}\mathfrak{A})^{-1}(\mathfrak{C}\mathfrak{B}) = \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{C}^{-1}\mathfrak{C}\mathfrak{B} = \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{B}\ ,$$

---

1) Vgl. Segre a. a. O. Art. 1.

also, da: $(\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{B})^2 = 1\ , \quad \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{B} \neq 1\ ,$

$$((\mathfrak{C}\mathfrak{A})^{-1}(\mathfrak{C}\mathfrak{B}))^2 = 1\ , \quad (\mathfrak{C}\mathfrak{A})^{-1}(\mathfrak{C}\mathfrak{B}) \neq 1\ ,$$

(vgl. 38, Anmerkung) und ebenso:

$$((\mathfrak{A}\mathfrak{D})(\mathfrak{B}\mathfrak{D})^{-1})^2 = 1\ , \quad (\mathfrak{A}\mathfrak{D})(\mathfrak{B}\mathfrak{D})^{-1} \neq 1\ .$$

46. **Satz.** *Durch jede Verwandtschaft geht eine involutorische Verwandtschaft in eine involutorische, zwei harmonische Verwandtschaften in zwei harmonische über* [1]).

Denn geht durch irgend eine Verwandtschaft s in $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}'$ über, so gehen (38.) die Formeln:

$$s^2 = 1\ , \quad s \neq 1 \quad \text{und} \quad (\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1})^2 = 1\ , \quad \mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1} \neq 1$$

über in:

$$\mathfrak{S}'^2 = 1\ , \quad \mathfrak{S}' \neq 1 \quad \text{und} \quad (\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'^{-1})^2 = 1\ , \quad \mathfrak{A}'\mathfrak{B}'^{-1} \neq 1\ ,$$

was (nach 41. und 44.) sich mit der Aussage des Satzes deckt.

E. Vertauschbarkeit.

47. Sind zwei involutorische Verwandtschaften t und u vertauschbar, d. h. ist:

$$tu = ut\ ,$$

so wird (43.): $(tu)^2 = 1\ ,$

oder (41.): $(tu^{-1})^2 = 1\ ,$

d. h. es sind, wenn t von u verschieden ist, t und u zu einander harmonisch.

Sind umgekehrt t und u harmonische involutorische Verwandtschaften, so ist:

$$(tu^{-1})^2 = (tu)^2 = 1\ ,$$

also: $tu = ut\ ,$ d. h.:

Satz. *Zwei von einander verschiedene vertauschbare involutorische Verwandtschaften sind harmonisch. Und umgekehrt: zwei harmonische involutorische Verwandtschaften sind vertauschbar.*

48. Wegen

$$(tu)^2 = 1\ , \quad tu \neq 1$$

---

1) Es sind also die involutorische und die harmonische Eigenschaft jeder beliebigen Verwandtschaft gegenüber *invariant.*

ist die Folge tu selbst eine involutorische Verwandtschaft, wir nennen sie s und haben:

$$tu = s\ , \quad stu = 1\ ,$$

was man auch schreiben kann (35, Zusatz III):

$$\begin{aligned} stu &= 1\ , & uts &= 1\ , \\ tus &= 1\ , & sut &= 1\ , \\ ust &= 1\ , & tsu &= 1\ . \end{aligned}$$

Daraus bestimmen sich s, t, u:

$$\begin{aligned} s &= tu = ut\ , \\ t &= us = su\ , \\ u &= st = ts\ , \end{aligned}$$ d. h.:

Satz. *Zwei vertauschbare involutorische Verwandtschaften und ihre Folge bilden drei involutorische Verwandtschaften, von denen jede die Folge der beiden andern ist, und jede mit jeder vertauschbar, also jede zu jeder harmonisch ist.*

Aus den letzten Gleichungen, sowie aus:

$$s^2 = 1\ , \quad t^2 = 1\ , \quad u^2 = 1$$

folgt, dass drei solche Verwandtschaften zusammen mit der Identität eine *Gruppe* bilden, worunter eine Gesammtheit von Verwandtschaften verstanden ist, von der Art, dass die Folge von irgend zweien derselben wieder der Gesammtheit angehört.

VIII. Klassen und Gruppen von Verwandtschaften, deren jede eine Folge von involutorischen Verwandtschaften ist.

49. Um die bisher abgeleiteten allgemeinen Sätze für einzelne Gebiete der Geometrie fruchtbar werden zu lassen, können wir nicht mehr bei der Annahme beharren, dass die zu betrachtenden Verwandtschaften ganz beliebige sein sollen, sondern wir müssen uns Beschränkungen auferlegen, durch welche wir zu gewissen abgegrenzten Klassen von Verwandtschaften gelangen.

Wir begrenzen unsere Aufgabe gemäss des in 40. aufgestellten Grundsatzes so:

Wir wollen uns auf die Theorie derjenigen Klassen von Verwandtschaften beschränken, in welchen sich jede einzelne als Folge von involutorischen Verwandtschaften darstellt.

a) Zu solchen Klassen von Verwandtschaften gelangen wir am leichtesten, wenn wir von einer bestimmten Klasse von involutorischen Verwandtschaften ausgehen, und aus ihnen Folgen bilden.

Würden wir nun aus je zwei, aus je drei u. s. w. der gegebenen involutorischen Verwandtschaften wieder neue Verwandtschaften bilden, so würden wir eine unendliche Anzahl von neuen Klassen zusammengesetzter Verwandtschaften bekommen. Soll sich diese Anzahl nicht ins Unendliche steigern, so müssen wir noch eine weitere Annahme machen:

Wir setzen voraus, dass wir nur bis zu einer gewissen Anzahl von Gliedern, die in eine Folge von involutorischen Verwandtschaften eintreten, neue Verwandtschaften bekommen, dass aber jede grössere Anzahl sich auf eine geringere Anzahl zurückführen lässt.

Ein Beispiel dazu haben wir in den aus Umwendungen zusammengesetzten Bewegungen kennen gelernt, bei welchen jede beliebige Folge von Umwendungen sich auf die Folge von zweien zurückführen lässt. Da auch jede einzelne Umwendung sich in eine Folge von zweien zerlegen lässt, haben wir hier nur eine einzige Klasse von Verwandtschaften.

Weitere Beispiele.

Die involutorische Verwandtschaft, von der wir ausgehen, sei die Spiegelung eines räumlichen Systems an einem Punkt:

Ein System Σ_1 heisst an einem Punkt S in ein System Σ_2 gespiegelt, wenn für je zwei entsprechende Punkte A_1 und A_2 der beiden Systeme die Streckengleichung gilt: $\overline{A_1 S} = \overline{S A_2}$.

Die Verwandtschaft ist involutorisch, da ihre Wiederholung A_2 wieder in A_1 überführt.

Wir wollen alle Verwandtschaften bilden, die aus der Folge von 2, 4, .. $2n$ oder (anderes Beispiel) von 1, 3, ... $2n - 1$ dieser Spiegelungen bestehen.

Bilden wir zuerst die Folge der Spiegelung am Punkte S und derjenigen am Punkte T, d. h., wenn wir die Verwandtschaft mit demselben Zeichen wie den Spiegelpunkt belegen, die Folge $S\,T$. Für jeden Punkt A_1 erhält man den entsprechenden Punkt A_2 aus:

$$A_1 \{S\,T\} A_2$$

oder:

$$A_1 \{S\} A_{12} \{T\} A_2 .$$

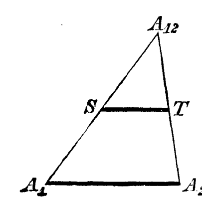
Es ist also:

$$\overline{A_1 S} = \overline{S A_{12}} , \quad \overline{A_{12} T} = \overline{T A_2} ,$$

daher:

$$\overline{A_1 A_2} = \overline{A_1 S} + \overline{S A_{12}} + \overline{A_{12} T} + \overline{T A_2} = 2\,\overline{S A_{12}} + 2\,\overline{A_{12} T} = 2\,\overline{S T};$$

d. h.:



Satz. *Die Folge der Spiegelungen an zwei Punkten S, T ist gleich einer Verschiebung um die doppelte Strecke $\overline{S T}$.*

Umkehrung. *Jede Verschiebung eines räumlichen Systems um eine Strecke a ist gleich der Folge der Spiegelungen an zwei Punkten S, T, von welchen der eine ganz beliebig gewählt werden kann.*

Der andere ist dann aus der Gleichung $2\,\overline{S T} = a$ zu bestimmen.

Zusatz. *Eine Folge von Spiegelungen an zwei Punkten S, T ist gleich einer solchen an S' T', d. h. es gilt die Verwandtschaftsgleichung:*

$$S\,T = S'\,T',$$

wenn die Streckengleichung gilt:

$$\overline{S\,T} = \overline{S'\,T'}.$$

Bilden wir nun die Folge von *drei* solchen Spiegelungen $S\,T\,U$, so bestimme man den Punkt V so, dass:

$$T\,U = S\,V \quad \text{d. h.} \quad \overline{T\,U} = \overline{S\,V},$$

und erhält so die Verwandtschaftsgleichung:

$$S\,T\,U = S\,S\,V = V.$$

Daraus folgt:

Jede Folge einer ungeraden bezw. geraden Anzahl von Spiegelungen eines räumlichen Systems an Punkten ist gleich einer solchen Spiegelung bezw. gleich der Folge von zweien.

Wir haben so zwei Beispiele gewonnen, in welchen es nur je eine Klasse von Verwandtschaften giebt.

Verlangen wir (weiteres Beispiel) die Klasse von Verwandtschaften zu bestimmen, die sich aus einer beliebigen Anzahl von Spiegelungen an Punkten bilden lassen, so finden wir, dass dieselbe in zwei Unterklassen zerfällt, nämlich in die beiden Klassen der vorigen Beispiele.

b) Statt von den involutorischen Verwandtschaften auszugehen, und von da zu den allgemeineren zu gelangen, können wir auch den umgekehrten Weg machen:

Liegt uns irgend eine bestimmte Klasse von Verwandtschaften vor, so haben wir zuerst zu untersuchen, ob es möglich ist, jede dieser Verwandtschaften als Folge von involutorischen Verwandtschaften aufzufassen [1]).

---

1) Dies ist oft auf verschiedene Weisen möglich. So kann jede ebene Collineation als Folge von zwei quadratischen involutorischen Verwandtschaften, oder als Folge von drei involutorischen Collineationen aufgefasst

50. Auf die erst geschilderte Weise kommen wir zu abgegrenzten Klassen von Verwandtschaften; bilden wir aber wieder aus ihnen Folgen, so können daraus wieder neue Klassen entstehen. So erhielten wir eine Klasse von Verwandtschaften, die jede Folge einer ungeraden Anzahl von Spiegelungen an Punkten enthielt; bilden wir aber die Folge zweier solcher, so erhalten wir eine Verwandtschaft, die der Klasse nicht mehr angehört.

Um auch hier eine Grenze zu setzen, machen wir die weitere Annahme:

Wir wollen vorzüglich solche Klassen von Verwandtschaften, die aus involutorischen zusammengesetzt sind, betrachten, bei welchen die Folge von je zweien stets wieder eine Verwandtschaft der Klasse ergiebt.

Eine dieser letzteren Bedingung genügende Klasse nennt man eine *Gruppe von Verwandtschaften*[1]).

Als Beispiele kann die Klasse der Bewegungen, und die Gesammtheit der Verwandtschaften dienen, welche aus Folgen von einer beliebigen Anzahl von Spiegelungen an Punkten bestehen.

Es wäre wünschenswerth, noch weitere Beispiele dafür anzuführen, um daraus erkennen zu lassen, wie die gewonnenen Grundsätze dazu dienen, die verschiedenartigsten Gebiete der geometrischen Forschung theils unter gemeinsamem Gesichtspunkt zusammenzufassen, theils in ihren wechselseitigen Beziehungen zu durchschauen. Doch halte ich es für zweckmässiger, diese Beispiele — in den folgenden Arbeiten — ausführlicher zu behandeln, und so die allgemeinen Betrachtungen hier abzubrechen.

---

werden. Besonders wichtig sind die Zerlegungen, bei welchen (wie bei der letzteren) die involutorische Verwandtschaft selbst zu der betrachteten Klasse gehört.

1) Zu jeder Verwandtschaft einer Gruppe kann man sehr leicht die Gesammtheit der harmonischen Verwandtschaften finden (und zwar jede nur einmal), indem man sie mit jeder involutorischen Verwandtschaft der Gruppe zu einer Folge verbindet (oder auch, indem man alle umgekehrten Folgen bildet).

So findet man z. B. zu jeder räumlichen Collineation zweierlei harmonische Collineationen, da es (vgl. MÖBIUS und v. STAUDT a. a. O.) zweierlei involutorische Collineationen giebt, und zwar, wie man leicht sieht, ∞^6 der einen, ∞^8 der anderen Art.



(Abdruck aus den Berichten der math.-phys. Classe der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften 1891.)

SITZUNG VOM 3. AUGUST 1891.

Hermann Wiener, *Ueber geometrische Analysen.* Fortsetzung. Vorgelegt von F. ENGEL. Mit 15 Figuren.

IX. Ueber Gruppen, die ausser der Identität nur involutorische Verwandtschaften enthalten.

51. *Die involutorischen Verwandtschaften*, die wie im Früheren [1]), so auch im Folgenden den Mittelpunkt der Betrachtungen bilden, bezeichnen wir von nun ab kurzweg als Spiegelungen [2]).

Um die im VII. Abschnitt abgeleiteten Gesetze des Rechnens mit Spiegelungen fruchtbar zu machen, haben wir (50.) das Gebiet der Betrachtungen einzuschränken,

---

1) Der vorliegende Aufsatz ist die Fortsetzung der früheren:

I. *Die Zusammensetzung zweier endlichen Schraubungen zu einer einzigen.* I. bis III., 1. bis 11. Diese Berichte 1890, S. 13 bis 23.

II. *Zur Theorie der Umwendungen.* IV. und V., 12. bis 28. Diese Berichte 1890, S. 71. bis 87.

III. *Ueber geometrische Analysen.* VI. bis VIII., 29. bis 50. Diese Berichte 1890, S. 245 bis 267.

2) Der Begriff der involutorischen Verwandtschaft ist an dem einfachsten Beispiel der Spiegelung eines Gegenstandes an einem ebenen Spiegel für jedermann leicht verständlich, und deshalb wurde schon früher die Anwendung des Wortes »Spiegelung« auch auf die durch eine Gerade und auf die durch einen Punkt gewonnene derartige Beziehung (»Spiegelung an der Geraden, an dem Punkt«) und — von F. KLEIN — noch auf gewisse allgemeinere involutorische Beziehungen ausgedehnt. Wenn ich noch weiter gehe, und jede involutorische Verwandtschaft als Spiegelung bezeichne, so glaube ich dadurch nicht überflüssige Verdeutschungssucht zu bethätigen, sondern die Ausdrucksweise deutlicher und zugleich handlicher gemacht zu haben. Denn, wie auch sonst so oft, lassen sich hier vom deutschen Wort leicht die unbedingt nothwendigen Zusammensetzungen bilden; so wüsste ich nicht, wie man »zweispiegelige« und allgemeiner »ν-spiegelige« Verwandtschaften kurz und deutlich durch das frühere Wort ausdrücken wollte. Zudem ist aus dem Worte »Involution« seine Bedeutung nicht zu entnehmen.

Man vergleiche auch die Fussnote 1) von Art. 41.

I. *indem wir nur solche Verwandtschaften der Untersuchung unterwerfen, die sich als Folgen von Spiegelungen ausdrücken lassen,*

II. *indem wir Gruppen aus solchen Verwandtschaften bilden* [1].

Wir haben also allgemein die Gruppen von Verwandtschaften zu untersuchen, die sich als Folge von höchstens ν Spiegelungen ausdrücken lassen (die höchstens ν-spiegelig sind).

Vorher behandeln wir die besonders wichtigen Sonderfälle, in denen $\nu = 1$, bezw. $= 2$ ist, und untersuchen so:

a) Gruppen, die (ausser der Identität) nur Spiegelungen enthalten,

b) Gruppen, die (ausser der Identität und den Spiegelungen) nur solche Verwandtschaften enthalten, die sich als Folge von je *zwei* Spiegelungen darstellen lassen.

Für den allgemeinen Fall ergeben sich aus I und II die folgenden Hauptaufgaben. Aus I:

Erste Aufgabe. *Es sind alle möglichen Zerlegungen einer ν-spiegeligen Verwandtschaft in ν Spiegelungen anzugeben.*

Dies ergiebt in anderen Worten die Frage, wann ist

$$s_1 \cdot \cdot s_\nu = t_1 \cdot \cdot t_\nu\,?$$

Aus II, welches fordert, dass die Folge zweier Verwandtschaften der Gruppe wieder eine solche Verwandtschaft ist, folgt:

Zweite Aufgabe. *Es ist die Folge zweier mehrspiegeligen Verwandtschaften zu bilden.*

Es ist bemerkenswerth, dass trotz der Allgemeinheit der Fragestellung sich aus den Forderungen I und II ganz bestimmte Gesichtspunkte zu ihrer Lösung ergeben, die auf geometrisch wichtige Gruppen angewandt in diesen zur vollständigen Lösung führen.

Wir gehen jetzt zur Theorie der unter a) aufgeführten Gruppe über.

A. Allgemeine Theorie.

52. Die Bedingung dafür, dass die Folge zweier Spiegelungen s und t wieder eine Spiegelung ergeben soll, lässt bei wenig geänderter Schreibweise viererlei Deutungen zu (vgl. 47. und 48.); man kann schreiben:

---

1) Man vergleiche die Ausführungen in 49. und 50.

1) $(st)^2 = 1$, $(st) \neq 1$;[1] d. h. (nach 41.):

Die Folge der beiden (von einander verschiedenen) Spiegelungen s und t ist wieder eine Spiegelung.

2) $st = ts$; d. h. (nach 39.):

Die beiden Spiegelungen s und t sind vertauschbar.

3) $(st^{-1})^2 = (st)^2 = 1$, $st \neq 1$; d. h. (nach 44.):

Die beiden Spiegelungen sind harmonisch.

4) $st = ts$ und $ts = st$; d. h. (nach 36.):

Jede der beiden Spiegelungen wird durch die andere in sich übergeführt.

53. Giebt es nun eine *Gruppe*, die ausser der Identität 1 *nur* Spiegelungen enthält:

$$1, s_1, s_2 \cdots s_\varkappa, \cdots s_\lambda \cdots$$

so muss die Folge je zweier dieser Spiegelungen $s_\varkappa s_\lambda$ entweder wiederum eine jener Spiegelungen oder die Identität ergeben, (das letztere, wenn *dieselbe* Spiegelung zweimal vorkommt, einmal als $s_\varkappa$, das andere Mal als s_λ, so dass $s_\varkappa = s_\lambda$, $s_\varkappa s_\lambda = s_\varkappa^2 = 1$).

Es werden also zwischen je zwei von einander verschiedenen Spiegelungen der Gruppe die obigen Beziehungen gelten.

Das einfachste Beispiel bietet jede Spiegelung s, die zusammen mit der Identität eine solche Gruppe bildet, da

$$s \cdot 1 = 1 \cdot s = s$$

und

$$s^2 = 1.$$

Ein weiteres Beispiel haben wir 48. in der Gruppe kennen gelernt, die aus den Verwandtschaften besteht:

$$1, t, u, (tu) = s.$$

Weitere Beispiele und geometrische Anwendungen setzen wir hinter die allgemeine Betrachtung dieser Gruppen, um Wiederholungen im Beweise zu vermeiden.

54. *Wir nehmen eine Gesammtheit von ν Spiegelungen $s_1, s_2, \cdots s_{\nu-1}, s_\nu$ als gegeben an, von der Art, dass je zwei von ihnen vertauschbar sind* (Eigenschaft 2).

Es gelten also die Formeln:

$$s^2_\varkappa = 1, \quad s_\varkappa s_\lambda = s_\lambda s_\varkappa,$$

wo $\varkappa$ und λ jede der Zahlen 1 bis ν bedeuten kann.

---

1) $st \neq 1$ ist (nach 38, Anm.) gleichbedeutend mit $s \neq t$, d. h. mit der Bedingung, dass s und t verschieden seien.

Aus dieser Voraussetzung ergiebt sich für beliebige Folgen, die aus den Spiegelungen der gegebenen Gesammtheit zu bilden sind, eine Reihe von Sätzen (55. bis 58.).

55. **Satz.** *Eine aus irgend welchen der gegebenen Spiegelungen gebildete Folge stellt eine Verwandtschaft dar, die bei jeder beliebigen Vertauschung der darin vorkommenden Spiegelungen ungeändert bleibt.*

Denn es können je zwei auf einanderfolgende Glieder einer solchen Folge vertauscht werden., da

$$\begin{aligned} s_\iota \cdot\cdot s_\varkappa s_\lambda \cdot\cdot s_\mu &= s_\iota \cdot\cdot (s_\varkappa s_\lambda) \cdot\cdot s_\mu && (34, \text{Zus.}) \\ &= s_\iota \cdot\cdot (s_\lambda s_\varkappa) \cdot\cdot s_\mu && (54.) \\ &= s_\iota \cdot\cdot s_\lambda s_\varkappa \cdot\cdot s_\mu ; \end{aligned}$$

jede beliebige Vertauschung kann aber durch allmähliges Vertauschen benachbarter Glieder hergestellt werden.

56. **Satz.** *Je zwei solche Folgen bilden wieder zwei vertauschbare Verwandtschaften.*

Sind $s_\iota \cdot\cdot s_\varkappa = \mathfrak{A}$ und $s_\lambda \cdot\cdot s_\mu = \mathfrak{B}$

irgend zwei solche Verwandtschaften, so ist (nach 34, Zus.):

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = (s_\iota \cdot\cdot s_\varkappa)\,(s_\lambda \cdot\cdot s_\mu) = (s_\iota \cdot\cdot s_\varkappa s_\lambda \cdot\cdot s_\mu)$$

und dies (nach 55.):

$$= (s_\lambda \cdot\cdot s_\mu s_\iota \cdot\cdot s_\varkappa) = (s_\lambda \cdot\cdot s_\mu)\,(s_\iota \cdot\cdot s_\varkappa) = \mathfrak{B}\mathfrak{A}, \quad \text{w. z. b. w.}$$

57. **Satz.** *Jede aus Spiegelungen der gegebenen Gesammtheit gebildete Folge lässt sich so umformen, dass keine von den Spiegelungen mehr als einmal vorkommt.*

Denn kommt eine der Spiegelungen $a_\varkappa$ mehrere Male vor, so vertausche man die Spiegelungen der Folge so, dass alle vorkommenden $a_\varkappa$ nebeneinander stehen; dann fallen je zwei aufeinanderfolgende heraus (42.). Es bleibt also *ein* oder *kein* $a_\varkappa$ in der Folge übrig, je nachdem $a_\varkappa$ eine ungerade oder gerade Anzahl mal vorkam.

58. **Satz.** *Jede aus Spiegelungen der gegebenen Gesammtheit gebildete Folge ist — wenn sie nicht der Identität gleich ist — wieder eine Spiegelung.*

Ist nämlich $(a_\iota \cdot\cdot a_\varkappa)$ eine solche Folge, so ist

$$(a_\iota \cdot\cdot a_\varkappa)^2 = (a_\iota \cdot\cdot a_\varkappa a_\iota \cdot\cdot a_\varkappa) = (a_\iota a_\iota \cdot\cdot a_\varkappa a_\varkappa) = 1 ;$$

ist also $(a_\iota \cdot\cdot a_\varkappa) \neq 1$, so ist es (nach 41.) eine Spiegelung.

59. Um alle möglichen Verwandtschaften zu finden, die sich

als Folgen von Spiegelungen der gegebenen Gesammtheit bilden lassen, braucht man sich (nach 57.) nur auf die Folgen zu beschränken, die jede dieser Spiegelungen nur *einmal* enthält, wobei es (nach 55.) nicht auf die Anordnung der in der Folge enthaltenen Spiegelungen ankommt. Wir erhalten also alle möglichen so zusammensetzbaren Verwandtschaften, wenn wir alle möglichen Folgen von je 2, 3, $\cdot\cdot$ ν—1, ν der gegebenen Spiegelungen $s_1, \cdot\cdot s_\nu$ bilden.

So kommen wir zu

$$\begin{gathered} 1, \\ s_1, s_2 \cdot\cdot s_{\nu-1}, s_\nu \\ (s_1\ s_2), (s_1\ s_3) \cdot\cdot (s_{\nu-2}, s_\nu), (s_{\nu-1}, s_\nu) \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ (s_1 \cdot\cdot s_{\nu-1}), \cdot\cdot (s_2 \cdot\cdot s_\nu) \\ (s_1\ s_2 \cdot\cdot s_{\nu-1}\ s_\nu), \end{gathered}$$

wobei jede in eine Klammer gefasste Folge als eine einzige Verwandtschaft zu betrachten ist.

Die *Anzahl* der so gebildeten Verwandtschaften ist:

$$\binom{\nu}{0} + \binom{\nu}{1} + \cdot\cdot \quad + \binom{\nu}{\nu-1} + \binom{\nu}{\nu} = 2^\nu .$$

Sie sind alle — soweit sie nicht etwa die Identität darstellen — *Spiegelungen* (58.) und bilden eine *Gruppe*. Der Beweis dafür ist im Gesagten schon enthalten; wir können uns aber auch nachträglich direct von der Gruppeneigenschaft der Verwandtschaften überzeugen. Denn wirklich ist die Folge von irgend zweien t und u der 2^ν Verwandtschaften wieder eine von diesen; sind nämlich die beiden Verwandtschaften gleich ($t=u$), so ist ihre Folge $tu = 1$, da $t^2 = 1$; sind sie aber nicht gleich, so ist ihre Folge (nach 57.) unter den 2^ν Verwandtschaften enthalten.

60. Wenn wir verlangen, dass unter den 2^ν aus $s_1, \cdot\cdot s_\nu$ gewonnenen Verwandtschaften keine gleichen vorkommen, so müssen wir annehmen, dass zwischen den ν gegebenen Spiegelungen oder einigen von ihnen keine Gleichung von der Form

$$1 = s_\iota\, s_\varkappa \cdot\cdot s_\lambda$$

besteht, in welcher keine Spiegelung doppelt vorkommt. Denn

in dem Fall des Bestehens einer solchen Gleichung brauchten wir nicht ν Spiegelungen und ihre Folgen zu betrachten, sondern würden schon mit $\nu - 1$ auskommen, indem sich eine als Folge der übrigen darstellte,

z. B. $$s_\iota = s_\varkappa \cdot \cdot s_\lambda .$$

Aus den $\nu - 1$ Spiegelungen lassen sich aber (nach 59.) nicht mehr als $2^{\nu-1}$ *verschiedene* Verwandtschaften gewinnen. Sagen wir also: *die ν Spiegelungen $s_1, \cdot \cdot s_\nu$ seien von einander unabhängig, wenn keine Gleichung von der obigen Form zwischen ihnen oder einigen von ihnen besteht,* so haben wir den

Satz. *Sind die 2^ν Verwandtschaften, die nach 59. aus ν gegebenen vertauschbaren Spiegelungen gewonnen sind, von einander verschieden, so sind die ν gegebenen Spiegelungen von einander unabhängig.*

Und von diesem Satz gilt auch die

Umkehrung. *Sind die gegebenen Spiegelungen $s_1, \cdot \cdot s_\nu$ von einander unabhängig, so sind alle 2^ν daraus gewonnenen Verwandtschaften von einander verschieden.*

Zum Beweise greifen wir zwei von den 2^ν Verwandtschaften heraus:

$$t = (s_\iota \cdot \cdot s_\varkappa) \quad \text{und} \quad u = (s_\lambda \cdot \cdot s_\mu) ,$$

wobei zufolge der Bildungsweise der 2^ν Verwandtschaften in t nicht dieselbe Spiegelung zweimal vorkommt, ebensowenig wie in u. Würden nun beide *dieselbe* Verwandtschaft ausdrücken, d. h.

$$(s_\iota \cdot \cdot s_\varkappa) = (s_\lambda \cdot \cdot s_\mu), \qquad \text{also (43.):}$$
$$s_\iota \cdot \cdot s_\varkappa \, s_\mu \cdot \cdot s_\lambda = 1$$

sein, so könnte hierin eine Spiegelung höchstens zweimal vorkommen, aber keinenfalls *jede* Spiegelung zweimal, da sonst die Ausdrücke für t und u (abgesehen von der Ordnung) übereinstimmten, so dass wir *dieselbe* Folge zweimal herausgegriffen hätten. Nach Weglassen (57.) der gleichen Spiegelungen in der letzten Gleichung bliebe zwischen den übrigen, die nun *verschiedene* von den ν gegebenen Spiegelungen sind, eine Gleichung bestehen, was der Bedingung der Unabhängigkeit der ν Spiegelungen zuwiderläuft.

61. Wir können die vorigen Ergebnisse zusammenfassen in den

Satz. *Aus ν gegebenen, von einander unabhängigen Spiegelungen $s_1, \cdot\cdot s_\nu$, von denen jede mit jeder anderen vertauschbar ist, lässt sich eine Gruppe von 2^ν von einander verschiedenen Verwandtschaften ableiten, welche ausser der Identität nur Spiegelungen enthält, von denen wieder jede mit jeder vertauschbar ist.*

Zusatz. *Je zwei von den in der Gruppe enthaltenen $2^\nu - 1$ Spiegelungen besitzen zu einander die Eigenschaften* 1) *bis* 4) *des Art.* 52.

62. **Satz.** *Wählt man von den $2^\nu - 1$ Spiegelungen der Gruppe irgend ν von einander unabhängige $t_1, \cdot\cdot t_\nu$ aus, so lässt sich aus ihnen die Gruppe in derselben Weise herleiten, wie aus den Spiegelungen $s_1, \cdot\cdot s_\nu$.*

Da jedes t als Folge der Spiegelungen $s_1, \cdot\cdot s_\nu$ erzeugt ist, so ist auch jede beliebige Folge der t in der aus den s gebildeten Gruppe enthalten. Da aber die aus den t erzeugte Gruppe nicht weniger als 2^ν verschiedene Verwandtschaften enthält, ist sie mit jener Gruppe identisch.

63. **Satz.** *Jede $\nu + 1$ Spiegelungen der Gruppe sind von einander abhängig.*

Denn sind $t_1, \cdot\cdot t_\nu, t_{\nu+1}$ beliebige $\nu + 1$ Spiegelungen der Gruppe, so muss, wenn nicht schon $t_1, \cdot\cdot t_\nu$ von einander abhängig sind, $t_{\nu+1}$ (nach 62.) als Folge der $t_1, \cdot\cdot t_\nu$ gebildet werden können, w. z. b. w.

64. Wählt man in der Gruppe von 2^ν Verwandtschaften beliebige μ aus $(\mu < \nu)$, die von einander unabhängig sind, so bestimmen diese (61.) eine Gruppe, die ausser der Identität $2^\mu - 1$ Spiegelungen enthält. Jede Verwandtschaft dieser kleineren Gruppe gehört auch der Gruppe von 2^ν Verwandtschaften an, man nennt sie deshalb eine *Untergruppe* derselben.

Da jede Verwandtschaft der Untergruppe durch jede Verwandtschaft der Hauptgruppe in sich übergeführt wird (61, Zusatz 4.), so wird *auch die ganze Untergruppe durch jede Verwandtschaft der Hauptgruppe in sich übergeführt*; eine solche Untergruppe heisst[1]) eine *ausgezeichnete Untergruppe.* Wir können daher sagen:

Satz. *Je μ von einander unabhängige der $2^\nu - 1$ Spiege-*

---

1) Man vgl. F. KLEIN, »Vorlesungen über das Ikosaeder,« (1884.) S. 7.

lungen unserer Gruppe (wo $\mu < \nu$) bestimmen eine ausgezeichnete Untergruppe von 2^μ Verwandtschaften[1]).

Einige Sätze für den Fall $\nu = 3$ folgen in Art. 72. und 73.

B. Anwendungen.

Wir geben einige Anwendungen, die uns für die demnächst folgenden Betrachtungen unentbehrlich sind. Die erste bezieht sich auf die Theorie der congruenten und symmetrisch-gleichen räumlichen Systeme, die andere auf die Theorie projectiver und collinearer Systeme.

Dabei beginnen wir mit dem Nachweise der Vertauschbarkeit der Spiegelungen bei ausgezeichneter Lage der Spiegelelemente, und bilden darauf die möglichen Gruppen aus diesen Spiegelungen.

α) Spiegelungen an Punkten, Geraden und Ebenen.

65. **Erklärungen.** *Ein Punkt A heisst* 1) *an einem Punkte S,* 2) *an einer Geraden s,* 3) *an einer Ebene* **S** *in einen Punkt A′ gespiegelt, wenn S der Mittelpunkt, s ein Mittelloth,* **S** *die mittelsenkrechte Ebene der Strecke AA′ ist.*

Ein *System* Σ heisst ebenso an S, s, **S**, in Σ' gespiegelt, wenn jeder Punkt von Σ in einen ihm entsprechend gesetzten Punkt von Σ' gespiegelt wird.

Da in der Erklärung die Punkte A und A' ganz gleichmässig vorkommen, so geht durch Spiegelung an S, s, **S** auch wieder A' in A über; die einmalige Wiederholung derselben Spiegelung bringt daher jeden Punkt in sich zurück, und das System mit sich selbst zur Deckung. D. h. man hat[2]):

$$S^2 = 1\,, \qquad s^2 = 1\,, \qquad \mathbf{S}^2 = 1\,.$$

66. Nach der Erklärung gilt die Streckengleichung $\overline{AS} = \overline{SA'}$

---

1) Bei W. DYCK (»Gruppentheoretische Studien II«, Math. Ann. XXII (1883) S. 108) findet sich die oben abgeleitete Gruppe als Beispiel einer Gruppe von Substitutionen »mit nur ausgezeichneten Untergruppen« erwähnt.

2) Da *Spiegelung* und *Spiegelelement* einander eindeutig zugeordnet sind, so können wir beide, ohne Irrthümer zu befürchten, mit demselben Zeichen belegen; im Texte können beide leicht aus einander gehalten werden, und in die Gleichungen treten nur die *Spiegelungen* (als Verwandtschaften) ein.

(vgl. Art. 49, die Erklärung unter »Weitere Beispiele«); dieselbe Gleichung gilt auch bei der Spiegelung an s und **S**, wenn S der Fusspunkt des auf s bezw. **S** errichteten Lothes AA' ist. Wir erhalten danach folgende

Sätze. *Statt einen Punkt A* 1) *an einer Geraden s*, 2) *an einer Ebene* **S** *zu spiegeln, kann man ihn auch an dem Fusspunkte S des von A aus auf die Gerade s bezw. auf die Ebene* **S** *errichteten Lothes spiegeln, und umgekehrt.*

3) *Statt einen Punkt A an einer Ebene* **S** *zu spiegeln, kann man ihn auch an einer Geraden s spiegeln, die in der Ebene* **S** *liegt und durch den Fusspunkt des von A auf* **S** *errichteten Lothes geht, und umgekehrt.*

Da nämlich **S** die mittelsenkrechte Ebene zu AA' ist, so ist jener Fusspunkt S die Mitte von AA' und jene in **S** liegende und durch S gehende Gerade ein Mittelloth von AA'.

---

67. Wir geben zuerst Beispiele von Gruppen, die ausser der Identität drei Spiegelungen enthalten, für die also die Sätze in Art. 47. und 48. gelten.

Beschränken wir uns vorläufig auf ein *ebenes System*, so gilt der

Satz. *Die Folge der Spiegelungen eines ebenen Systems an zwei in seiner Ebene gelegenen senkrechten Geraden, und an ihrem Schnittpunkte ist in jeder Anordnung der Identität gleich.*

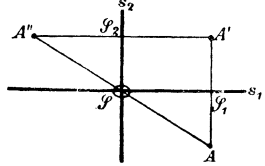
Es sei A ein beliebiger Punkt der Ebene und

$$A\{s_1\}A'\{s_2\}A''.$$

Wird dabei s_1 von AA' in S_1, s_2 von $A'A''$ in S_2 geschnitten, so ist (nach 66, 1):

$$A\{S_1\}A'\{S_2\}A'';$$

wegen der Punktspiegelung und weil $S_1A' \parallel SS_2$ und $S_2A' \parallel SS_1$ ist, hat man die Streckengleichung:



$$\begin{aligned} \overline{AS_1} &= \overline{S_1A'} = \overline{SS_2} \\ \overline{S_1S} &= \overline{A'S_2} = \overline{S_2A''}, \quad \text{daraus:} \\ \hline \overline{AS} &= \overline{SA''} \end{aligned}$$

(durch Addition der darüberstehenden Strecken). Diese Gleichung deckt sich mit der Formel:

$$A\{S\}A''.$$

Da dies für jeden beliebigen Punkt gilt, so gilt es auch für das ganze System, also ist:

$$s_1 s_2 = S \ , \quad \text{oder:} \quad s_1 s_2 S = 1 \ .$$

Daraus erhalten wir die

Zusätze I. *Die Spiegelungen eines ebenen Systems*

1) *an zwei in der Ebene gelegenen senkrechten Geraden,*

2) *an einer in der Ebene gelegenen Geraden und an einem auf dieser gelegenen Punkte sind vertauschbar.*

Denn aus $s_1 s_2 S = 1$ folgt (nach 43.)

1) $s_1 s_2 = S \ , \quad (s_1 s_2)^2 = 1 \ , \quad s_1 s_2 = s_2 s_1 \ .$

2) $S s_1 = s_2 \ , \quad (S s_1)^2 = 1 \ , \quad S s_1 = s_1 S \ .$

Zusatz II. *Die Spiegelungen eines ebenen Systems an zwei in seiner Ebene gelegenen senkrechten Geraden und an ihrem Schnittpunkte bilden mit der Identität eine Gruppe.*

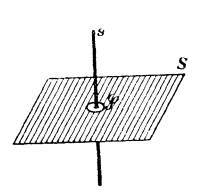
Die Gruppe besteht aus den Verwandtschaften

$$\begin{matrix} 1 \\ s_1 \ , \quad s_2 \\ (s_1 s_2) \end{matrix} \qquad \text{oder} \qquad \begin{matrix} 1 \\ s_1 \ , \quad s_2 \\ S. \end{matrix}$$

Man kann diese Gruppe ebenso gut aus s_1, S oder aus s_2, S ableiten.

---

68. Wir dehnen unsere Betrachtungen nun auf ein *räumliches System* aus.



Satz I. *Die Folge der Spiegelungen eines räumlichen Systems an einer Geraden s, an einer dazu senkrechten Ebene* **S**, *und am Schnittpunkte S beider ist (in jeder Anordnung) gleich der Identität.*

Ist A ein beliebiger Punkt, und ist

$$A \{ \mathbf{S} \} A' \{ s \} A'' \ ,$$

so lege man durch A und s eine Ebene, die **S** in einer Geraden s' senkrecht schneidet. Dann ist (nach 66, 3):

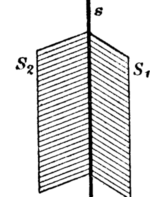
$$A \{ s' \} A' \{ s \} A'' \ .$$

Da die so entstehende Figur ganz in der durch A gelegten Ebene liegt, so ist der Satz in 67. anwendbar, also:

$$A \{ S \} A'' \ ,$$

und da dies für jeden beliebigen Punkt A gilt, so gilt es für das System, und es ist:

$$\mathbf{S}\, s = S \qquad \text{oder:} \qquad \mathbf{S}\, s\, S = 1 \; .$$



69. **Satz II.** *Die Folge der Spiegelungen eines räumlichen Systems an zwei zu einander senkrechten Ebenen und an ihrer Schnittgeraden ist (in jeder Anordnung) der Identität gleich.*

Ist A ein beliebiger Punkt und

$$A \{ \mathbf{S}_1 \} A' \{ \mathbf{S}_2 \} A'' ,$$

so lege man durch A eine Ebene, die senkrecht auf s und demnach auch auf $\mathbf{S}_1$ und $\mathbf{S}_2$ steht (die Figur in dieser Ebene ist durch die Figur zu 67. gegeben); schneidet diese die Ebenen $\mathbf{S}_1$ und $\mathbf{S}_2$ und die Gerade s in den Geraden s_1 und s_2 und dem Punkte S, so ist (66, 3):

$$A \{ s_1 \} A' \{ s_2 \} A'' ,$$

also (67.):

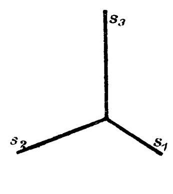
$$A \{ S \} A'' ,$$

wofür gesetzt werden kann (66, 1):

$$A \{ s \} A'' .$$

Da dies für jeden beliebigen Punkt A gilt, so gilt es allgemein für das System, also:

$$\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2 = s , \qquad \text{oder:} \qquad \mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2\, s = 1 \; .$$



70. **Satz III.** *Die Folge der Spiegelungen eines räumlichen Systems an drei einander senkrecht schneidenden Geraden ist gleich der Identität.*

(Vgl. 9, Zusatz II.) Sind s_1, s_2, s_3 die drei Geraden, und $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$, $\mathbf{S}_3$ die drei Ebenen, die durch s_2 und s_3, s_3 und s_1, s_1 und s_2 gehen, so ist (69.):

$$s_1 = \mathbf{S}_2 \mathbf{S}_3 , \quad s_2 = \mathbf{S}_3 \mathbf{S}_1 , \quad s_3 = \mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2 ,$$

also

$$s_1 s_2 s_3 = (\mathbf{S}_2 \mathbf{S}_3)(\mathbf{S}_3 \mathbf{S}_1)(\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2) = \mathbf{S}_2 \mathbf{S}_3 \mathbf{S}_3 \mathbf{S}_1 \mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2 = 1$$

(nach 42.).

71. **Zusammenfassung I.** *Es bilden zusammen mit der Identität eine Gruppe die Spiegelungen an folgenden Spiegelelementen:*

1) *an einer Ebene, an einer dazu senkrechten Geraden und an dem Schnittpunkte beider;*
2) *an zwei zu einander senkrechten Ebenen und an ihrer Schnittgeraden;*
3) *an drei einander senkrecht treffenden Geraden.*

Da aus $stu = 1$, wenn s, t, u Spiegelungen sind, die Vertauschbarkeit je zweier von ihnen folgt (48.), so erhalten wir folgende Sätze:

Zusammenfassung II. *Vertauschbar*[1]) *sind die Spiegelungen räumlicher Systeme an folgenden Spiegelelementen:*

1) *an einer Ebene und an einem auf ihr gelegenen Punkte;*
2) *an einer Geraden und an einem auf ihr gelegenen Punkte;*
3) *an einer Ebene und an einer darauf senkrechten Geraden;*
4) *an einer Ebene und an einer in ihr liegenden Geraden;*
5) *an zwei zu einander senkrechten Ebenen;*
6) *an zwei einander senkrecht schneidenden Geraden.*

Es folgt 1), 2), 3) aus 68, 4), 5) aus 69. und 6) aus 70.

Zusatz. *Von den Spiegelungen eines räumlichen Systems an den Spiegelelementen: Punkt, Gerade und Ebene sind zwei solche mit einander vertauschbar, bei denen das eine Spiegelelement im andern liegt, oder das andere senkrecht trifft.*

---

72. Um einen Ueberblick über die Beziehungen zu gewinnen, die zwischen diesen sieben Spiegelungen bestehen, schieben wir hier noch einige allgemeine Sätze ein über die *Gruppe von 2^3 Verwandtschaften, in der ausser der Identität nur Spiegelungen vorkommen.*

Die Gruppe kann aus drei von einander unabhängigen der sieben Spiegelungen gewonnen werden. Nun kann man von den 7 Spiegelungen (da es auf die Reihenfolge nach 56. nicht ankommt) auf $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$ Arten je drei zu einer Folge verbinden. Zwischen den 7 Spiegelungen besteht keine Gleichung $\sigma_1 \sigma_2 = 1$ oder $\sigma_1 = \sigma_2$, da sie alle verschieden sind (61.), daher können drei von den Spiegelungen, σ_1, σ_2, σ nur dann von einander abhängig sein, wenn $\sigma_1 \sigma_2 \sigma = 1$ oder $\sigma_1 \sigma_2 = \sigma$ ist. Man

---

1) Später (in der Theorie der congruenten und symmetrischen räumlichen Systeme) ergiebt sich leicht, dass dies die *einzigen* vertauschbaren derartigen Spiegelungen sind.

erhält daher alle diese Gleichungen, indem man auf alle möglichen Weisen die Folgen $\sigma_1 \sigma_2$ bildet, und zwar erhält man so jede Gleichung dreimal. Es giebt demnach $\frac{7\,.\,6}{1\,.\,2\,.\,3} = 7$ von einander verschiedene solche Gleichungen.

Satz. *Zwischen den sieben Spiegelungen der Gruppe giebt es sieben Gleichungen von der Form* $\sigma_1 \sigma_2 \sigma = 1$.

73. Nach dem Vorigen bleiben von den 35 möglichen Folgen $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ solche, die von einander unabhängige Spiegelungen enthalten, in der Anzahl $35 - 7 = 28$ übrig.

Nimmt man drei von den von einander unabhängigen Spiegelungen σ_1, σ_2, σ_3 heraus, so enthält die Gruppe ausser diesen noch vier Spiegelungen, nämlich (62.):

$$(\sigma_2 \sigma_3) = \sigma_1' \,, \quad (\sigma_3 \sigma_1) = \sigma_2' \,, \quad (\sigma_1 \sigma_2) = \sigma_3' \,, \quad (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3) = \sigma' \,.$$

Man kann daher aus je drei von einander unabhängigen der sieben Spiegelungen eine Gleichung $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma' = 1$ gewinnen, und es sind je drei in dieser Folge vorkommende Spiegelungen von einander unabhängig; da nämlich $\sigma_2 \sigma_3 = \sigma_1'$ ist, so kann nicht $\sigma_2 \sigma_3 \sigma' = 1$, d. h. $\sigma_2 \sigma_3 = \sigma'$ sein, da $\sigma' \neq \sigma_1'$ (60, Umkehrung).

Jede Gleichung von der Form $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma' = 1$ wird daher auf vier Weisen durch Zusammenstellung je dreier von einander unabhängigen Spiegelungen gewonnen, es giebt also $\frac{28}{4} = 7$ solche Gleichungen.

Satz. *Zwischen den sieben Spiegelungen der Gruppe giebt es sieben Gleichungen von der Form* $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma' = 1$.

Zusatz I. *Greift man aus den sieben Spiegelungen der Gruppe drei von einander unabhängige heraus, so bilden diese drei zusammen mit ihrer Folge vier Spiegelungen, deren Folge der Identität gleich ist, ohne dass die Folge irgend dreier von ihnen der Identität gleich ist.*

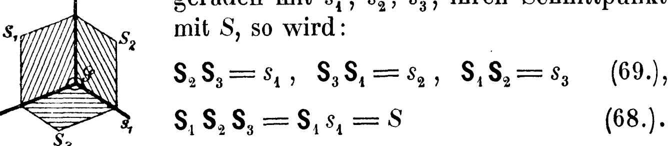
Zusatz II (Umkehrung). *Sucht man vier von den sieben Spiegelungen der Gruppe so heraus, dass nicht schon die Folge irgend dreier von ihnen der Identität gleich ist, so ist die Folge der vier der Identität gleich.*

Denn aus dreien σ_1, σ_2, σ_3 von ihnen kann man (62.), da sie unabhängig sind, alle übrigen ableiten; drei von diesen übrigen sind zusammen mit je zweien der gegebenen der Identität gleich

($\sigma_2 \sigma_3 \sigma_1' = 1$ u. s. w.), also ist die vierte σ' der Folge $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ gleich, d. h. $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma' = 1$.

---

74. Es seien $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$, $\mathbf{S}_3$ drei auf einander senkrechte Ebenen; bezeichnen wir, wie oben (70.) ihre Schnittgeraden mit s_1, s_2, s_3, ihren Schnittpunkt mit S, so wird:



$$\mathbf{S}_2 \mathbf{S}_3 = s_1\,, \quad \mathbf{S}_3 \mathbf{S}_1 = s_2\,, \quad \mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2 = s_3 \qquad (69.),$$

$$\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2 \mathbf{S}_3 = \mathbf{S}_1 s_1 = S \qquad (68.).$$

Die ersten dieser Gleichungen sagen aus, dass je zwei der Spiegelungen an den Ebenen $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$, $\mathbf{S}_3$ vertauschbar sind, die letzte, dass diese drei Spiegelungen von einander unabhängig sind.

Die nach 59. aus ihnen gebildete Gruppe enthält demnach ausser der Identität sieben verschiedene Spiegelungen, von denen jede mit jeder anderen vertauschbar ist. Die Gruppe wird:

$$\begin{matrix} 1 \\ \mathbf{S}_1\,,\ \mathbf{S}_2\,,\ \mathbf{S}_3 \\ \mathbf{S}_2\mathbf{S}_3\,,\ \mathbf{S}_3\mathbf{S}_1\,,\ \mathbf{S}_1\mathbf{S}_2 \\ \mathbf{S}_1\mathbf{S}_2\mathbf{S}_3 \end{matrix} \qquad \text{oder:} \qquad \begin{matrix} 1 \\ \mathbf{S}_1\,,\ \mathbf{S}_2\,,\ \mathbf{S}_3 \\ s_1\,,\ s_2\,,\ s_3 \\ S\,. \end{matrix}$$

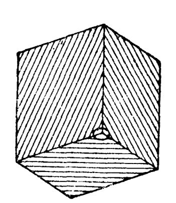
Satz. *Die Spiegelungen eines räumlichen Systems an drei zu einander senkrechten Ebenen, sowie die an ihren drei Schnittgeraden und die an ihrem Schnittpunkte bilden zusammen mit der Identität eine Gruppe vertauschbarer Verwandtschaften.*

75. Die möglichen Gleichungen $\sigma_1 \sigma_2 \sigma = 1$ zwischen den obigen sieben Spiegelungen erhält man, indem man die Folgen von je zweien bildet (72.). Da aber von irgend zweien der sieben Spiegelelemente in 74. allemal das eine im andern liegt oder es senkrecht trifft, so kann man daraus keine anderen Gleichungen erhalten, als die in den Sätzen 68., 69. und 70. vorkommen. In der That ergeben sich je dreimal die drei Spiegelelemente des Satzes 68. und 69. und einmal die Spiegelelemente des Satzes 70, d. h. wirklich sieben Beziehungen $\sigma_1 \sigma_2 \sigma = 1$.

Satz. *Man bekommt alle sieben Gleichungen von der Form* $\sigma_1 \sigma_2 \sigma = 1$ *durch je dreimalige Anwendung der Sätze I. und II.* (68. *und* 69.) *und durch einmalige Anwendung des Satzes III.* (70.).

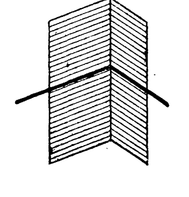
76. Wählt man von den sieben Spiegelungen in 74. auf alle mögliche Weisen je vier aus, von denen keine drei von einander abhängig sind, so erhält man (73, Zusatz II.) alle möglichen Gleichungen von der Form $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma' = 1$. Dies liefert die folgenden

Sätze. *Die Folge der Spiegelungen*



I'. *an drei zu einander senkrechten Ebenen und an ihrem Schnittpunkte*:

$$(\mathbf{S}_1\,,\quad \mathbf{S}_2\,,\quad \mathbf{S}_3\,,\quad S)\,,$$



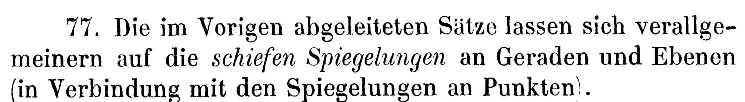
II'. *an zwei zu einander senkrechten Ebenen, und an zwei Geraden, die sich auf der Schnittgeraden der Ebene senkrecht treffen, und von denen in jeder der Ebenen eine liegt*:

$$(\mathbf{S}_1\,,\quad \mathbf{S}_2\,,\quad s_1\,,\quad s_2)\,,$$

III'. *an zwei einander senkrecht treffenden Geraden, an ihrer Ebene und an ihrem Schnittpunkte*:

$$(s_2\,,\quad s_3\,,\quad \mathbf{S}_1\,,\quad S)\,,$$

ist in jeder Anordnung der Identität gleich.



Der Beweis, der schon aus 73, Zusatz II. folgt, kann auch direct geführt werden:

I'. $(\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2)(\mathbf{S}_3 S) = s_3 s_3 = 1$ (nach 69. und 68.),
II'. $(s_1 s_2)(\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2) = s_3 s_3 = 1$ (nach 70. und 69.),
III'. $(s_2 s_3)(\mathbf{S}_1 S) = s_1 s_1 = 1$ (nach 70. und 68.).

Zusatz. *Man bekommt alle sieben Gleichungen von der Form* $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma' = 1$ *durch je dreimalige Anwendung der Sätze II'. und III'. und durch einmalige Anwendung des Satzes I'.*

---

77. Die im Vorigen abgeleiteten Sätze lassen sich verallgemeinern auf die *schiefen Spiegelungen* an Geraden und Ebenen (in Verbindung mit den Spiegelungen an Punkten).

Die Beweise sind oben so geführt, dass sie sich, nach Einführung des Begriffes der schiefen Spiegelung, unmittelbar übertragen lassen. Wir brauchen darauf um so weniger einzugehen, als die schiefen (sowie die senkrechten) Spiegelungen nur einen besonderen Fall der nun folgenden, der projectiven Spiegelungen bilden.

β) Projective Spiegelungen.

78. **Erklärungen.** 1) *In einem Punktsystem auf der Geraden heisst ein Punkt A an einem Punktepaar S_1, S_2 in einen Punkt A' (projectiv) gespiegelt, wenn das Paar A, A' zum Paar S_1, S_2 harmonisch ist.*

2) *In einem ebenen Punktsystem heisst ein Punkt A an einem aus dem Punkte S und der Geraden s bestehenden Paar in einen Punkt A' gespiegelt, wenn die beiden Punkte A und A' zu S und s harmonisch sind.*

3) *und* 4) *In einem räumlichen System heisst ein Punkt A an einem aus dem Punkte S und der Ebene* **S** *bestehenden Paar, bezw. an einem aus den beiden Geraden s_1 und s_2 bestehenden Paar nach A' gespiegelt, wenn das Punktepaar A, A' zum Paar S,* **S** *bezw. zum Paar s_1, s_2 harmonisch ist.*[1]

Dabei sagen wir nach dem Vorgang von Reye[2], dass ein Punktepaar A, A' zum Punkte S und der Geraden s, bezw. zum Punkte S und der Ebene **S** harmonisch sei, wenn S auf der Geraden AA' liegt und s bezw. **S** diese Gerade im vierten harmonischen Punkte von S zu AA' trifft; ebenso, dass das Punktepaar A, A' zu den beiden Geraden s_1 und s_2 harmonisch sei, wenn diese Geraden die Gerade AA' in zwei zu diesen harmonischen Punkten treffen.

Ein *System* Σ (ein gerades, ebenes, räumliches) heisst an den genannten Elementen in das System Σ' gespiegelt, wenn jeder Punkt von Σ in einen Punkt von Σ' gespiegelt wird.

Dabei setzen wir voraus, dass bei der Spiegelung an S_1, S_2 an S, s, an S, **S**, an s_1, s_2 die Punkte S_1 und S_2 nicht zusammenfallen, dass S nicht in s bezw. in **S** liegt, und dass s_1 und s_2 keinen Punkt gemein haben, und erreichen dadurch, dass jedem Punkt A von Σ ein einziger Punkt A' von Σ' entspricht, und umgekehrt. Denn liegt der Punkt A in einem der beiden spiegelnden Elemente, so fällt A' mit ihm zusammen, da nach den Voraus-

---

1) Die projectiven (collinearen) Spiegelungen sind durch die oben angeführten noch nicht erschöpft. Es kommen noch diejenigen hinzu, die aus ihnen durch Projection (oder mittelst des Dualitätsprincips) gewonnen werden, und ausserdem noch weitere Spiegelungen, falls man sich auf das Vorhandensein *reeller* Elemente beschränkt.

2) Reye, Geometrie der Lage, erste Abtheilung, 2. Auflage, S. 35.

setzungen A nicht auch im anderen spiegelnden Element liegen und A' dadurch unbestimmt werden kann. Liegt aber A ausserhalb der spiegelnden Elemente, so giebt es nur eine einzige durch A gehende Gerade, die S enthält, bezw. sowohl s_1 wie s_2 schneidet, und auf dieser Geraden ist dann A' eindeutig bestimmt.

Da in den Erklärungen die beiden Punkte A und A' in ganz gleicher Weise vorkommen, so geht durch Spiegelung an jenen Elementen auch A' in A über. Die einmalige Wiederholung derselben derartigen Spiegelung bringt daher jeden Punkt in sich zurück, also das System mit sich selbst zur Deckung, und so ist der für die oben eingeführten Verwandtschaften gewählte Name »Spiegelung« gerechtfertigt. Schreiben wir diese Spiegelungen:

$$\Sigma\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{Bmatrix}\Sigma', \quad \Sigma\begin{Bmatrix} S \\ s \end{Bmatrix}\Sigma', \quad \Sigma\begin{Bmatrix} S \\ \mathbf{S} \end{Bmatrix}\Sigma', \quad \Sigma\begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{Bmatrix}\Sigma',$$

so hat man die Gleichungen:

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{Bmatrix}^2 = 1, \quad \begin{Bmatrix} S \\ s \end{Bmatrix}^2 = 1, \quad \begin{Bmatrix} S \\ \mathbf{S} \end{Bmatrix}^2 = 1, \quad \begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{Bmatrix}^2 = 1.$$

Anmerkung I. Da in einem solchen Paar, an dem gespiegelt wird, keines der beiden spiegelnden Elemente vor dem andern bevorzugt ist, so können wir sie auch vertauschen:

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_2 \\ S_1 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} S \\ s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} s \\ S \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} S \\ \mathbf{S} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{S} \\ S \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} s_2 \\ s_1 \end{Bmatrix}.$$

Anmerkung II. Bei *Folgen* von solchen Spiegelungen brauchen wir die Klammern nur einmal zu setzen. Wir schreiben also z. B.:

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{Bmatrix}^2 = \begin{Bmatrix} S_1\, S_1 \\ S_2\, S_2 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} S \\ \mathbf{S} \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S\, s_1 \\ \mathbf{S}\, s_2 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} S\, s \\ s\, S \end{Bmatrix} = 1.$$

79. **Sätze.** 1) *Statt einen Punkt A eines ebenen Systems an dem Paar* $\begin{Bmatrix} S \\ s \end{Bmatrix}$ *zu spiegeln, kann man ihn auch auf der Geraden AS an dem Punktepaar spiegeln, das aus S und dem Schnittpunkte der Geraden mit s besteht.*

2) *und* 3) *Statt einen Punkt A eines räumlichen Systems an dem Paar* $\begin{Bmatrix} S \\ \mathbf{S} \end{Bmatrix}$ *zu spiegeln, kann man ihn auch spiegeln.*

auf der Geraden SA an dem Punktepaar, das aus S und dem Schnittpunkte von **S** *mit der Geraden besteht;*

in jeder durch S und A gelegten Ebene an dem Paar, das aus S und der Geraden besteht, in welcher S die Ebene trifft.

4) *und* 5) *Statt einen Punkt A eines räumlichen Systems an dem Paar $\begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{Bmatrix}$ zu spiegeln, kann man ihn auch spiegeln:*

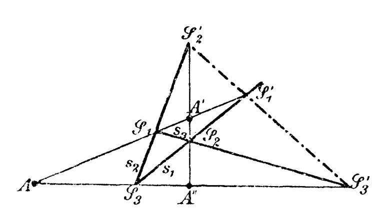
in der Geraden, die A enthält und s_1 und s_2 in S_1 und S_2 schneidet, an diesen beiden Schnittpunkten.

in der durch A und s_1 (bezw. durch A und s_2) gelegten Ebene an s_1 (bezw. s_2) und an dem Schnittpunkte S_2 (bezw. S_1) dieser Ebene mit s_2 (bezw. s_1).

Zusatz. *Die Sätze* 1) *bis* 5) *lassen sich auch umkehren.*

Der Beweis der Sätze 1) bis 4) und der Umkehrungen geht ohne weiteres aus dem Gesagten hervor. In 5) kann man durch A und den Schnittpunkt der Ebene As_1 mit der Geraden s_2 eine Gerade legen, die diesen Schnittpunkt enthält und s_1 trifft, also mit der A enthaltenden und s_1 und s_2 treffenden Geraden identisch ist, woraus 5) folgt.

80. **Satz.** *Die Folge der Spiegelungen eines ebenen Systems an drei aus Punkt und Gerade bestehenden Spiegelpaaren, deren Punkte die Ecken und deren Geraden die gegenüberliegenden Seiten eines Dreiecks bilden, ist der Identität gleich.*



Es seien S_1, S_2, S_3 die Ecken, s_1, s_2, s_3 die gegenüberliegenden Seiten eines Dreiecks, und

$$A \begin{Bmatrix} S_1 \\ s_1 \end{Bmatrix} A' \begin{Bmatrix} S_2 \\ s_2 \end{Bmatrix} A'' ;$$

schneidet man die Gerade AA' mit s_1 in S_1', die Gerade $A'A''$ mit s_2 in S_2', so wird (79, 1.):

$$A \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_1' \end{Bmatrix} A' \begin{Bmatrix} S_2 \\ S_2' \end{Bmatrix} A'' ,$$

d. h. es ist:

$$A, A' \text{ harm. } S_1, S_1' ; \quad A', A'' \text{ harm. } S_2, S_2' .$$

Da sich vier harmonische Punkte einer Geraden aus einem Punkte auf eine andere Gerade wieder als vier harmonische Punkte projiciren, so projicirt sich:

der vierte harmonische des Punktes A' zu S_1 und S_1' d. h. der Punkt A aus dem Punkte S_3 auf die Gerade $A'A''$

in den vierten harmonischen des Punktes A' zu S_2' und S_2, d. h. in den Punkt A'';

daher liegen die drei Punkte A, A'' und S_3 in einer Geraden; ganz ebenso beweist man, dass die Punkte A, A'' und der Schnittpunkt S_3' der Geraden $S_1 S_2$ und $S_1' S_2'$ auf einer Geraden liegen, also die vier Punkte A, A'', S_3, S_3' in einer Geraden. Sie liegen aber harmonisch, da in S_3 und S_3' je zwei Gegenseiten des vollständigen Vierecks $S_1 S_2 S_1' S_2'$ sich schneiden, während A und A' in den beiden übrigen Gegenseiten liegen [1]).

Es ist also (78,1):

$$A \left\{ \begin{matrix} S_3 \\ S_3' \end{matrix} \right\} A'' ,$$

wofür (nach 79, 2, Umkehrung) auch gesetzt werden kann:

$$A \left\{ \begin{matrix} S_3 \\ s_3 \end{matrix} \right\} A'' .$$

Da dies für jeden beliebigen Punkt gilt, so gilt es auch für das ganze System, und es ist:

$$\left\{ \begin{matrix} S_1 & S_2 \\ s_1 & s_2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} S_3 \\ s_3 \end{matrix} \right\} \quad \text{oder} \quad \left\{ \begin{matrix} S_1 & S_2 & S_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \end{matrix} \right\} = 1 .$$

Zusatz I. *Die Spiegelungen eines ebenen Systems an zwei aus Punkt und Gerade bestehenden Spiegelpaaren, bei welchen der Punkt eines jeden Paares in der Geraden des andern Paares liegt, sind vertauschbar.*

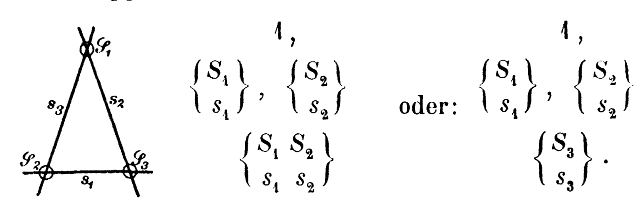
Beweis wie in 67, Zus. I.

Zusatz II. *Die Spiegelungen eines ebenen Systems an drei aus Punkt und Gerade bestehenden Spiegelpaaren, bei denen die Punkte die Ecken, die Geraden die gegenüberliegenden Seiten eines Dreiecks sind, bilden zusammen mit der Identität eine Gruppe von vertauschbaren Verwandtschaften.*

---

1) Den obigen Beweis musste ich hier mit den gewöhnlichen Hilfsmitteln der projectiven Geometrie führen; wir werden später aus der Theorie der Spiegelungen Hilfsmittel schöpfen, um solche Beweise — ohne die dem Beweise zu Grunde liegenden Voraussetzungen zu verlassen — in anmuthenderer Form erledigen zu können.

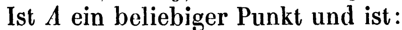
Die Gruppe besteht aus den Verwandtschaften:



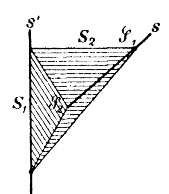
$$1,\quad \begin{Bmatrix} S_1 \\ s_1 \end{Bmatrix},\ \begin{Bmatrix} S_2 \\ s_2 \end{Bmatrix}\quad \begin{Bmatrix} S_1 & S_2 \\ s_1 & s_2 \end{Bmatrix}\qquad \text{oder:}\quad 1,\quad \begin{Bmatrix} S_1 \\ s_1 \end{Bmatrix},\ \begin{Bmatrix} S_2 \\ s_2 \end{Bmatrix}\quad \begin{Bmatrix} S_3 \\ s_3 \end{Bmatrix}.$$

81. Wir stellen die entsprechenden Sätze für den Raum auf.

Satz I. *Die Folge der Spiegelungen eines räumlichen Systems an zwei aus Punkt und Ebene bestehenden Spiegelpaaren* $\begin{Bmatrix} S_1 \\ \mathbf{S}_1 \end{Bmatrix}$ *und* $\begin{Bmatrix} S_2 \\ \mathbf{S}_2 \end{Bmatrix}$, *bei denen der Punkt eines jeden Paares in der Ebene des anderen liegt, und an einem dritten Paar, das aus der Verbindungsgeraden s jener Punkte und der Schnittgeraden s′ jener Ebenen besteht, ist (in jeder Anordnung) der Identität gleich.*



Ist A ein beliebiger Punkt und ist:



$$A \begin{Bmatrix} S_1 \\ \mathbf{S}_1 \end{Bmatrix} A' \begin{Bmatrix} S_2 \\ \mathbf{S}_2 \end{Bmatrix} A'',$$

so lege man durch S_1, S_2 und A eine Ebene, welche die Ebenen $\mathbf{S}_1$ und $\mathbf{S}_2$ in den Geraden s_1' und s_2' und die Gerade s im Punkte S schneiden möge. Dann ist (79, 3.):

$$A \begin{Bmatrix} S_1 \\ s_1' \end{Bmatrix} A' \begin{Bmatrix} S_2 \\ s_2' \end{Bmatrix} A''.$$

Da nun in dieser Ebene die Punkte S, S_1, S_2 die Ecken, die Geraden s, s_1', s_2' die gegenüberliegenden Seiten eines Dreiecks sind, so ist (80.):

$$A \begin{Bmatrix} S \\ s \end{Bmatrix} A'',$$

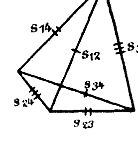
also auch (79, 5.):

$$A \begin{Bmatrix} s \\ s' \end{Bmatrix} A''.$$

Da dies für jeden beliebigen Punkt gilt, so gilt es für das System, und es ist:

$$\begin{Bmatrix} S_1 & S_2 \\ \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} s \\ s' \end{Bmatrix} \quad \text{oder:} \quad \begin{Bmatrix} S_1 & S_2 & s \\ \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_2 & s' \end{Bmatrix} = 1.$$

82. **Satz II.** *Die Folge der Spiegelungen eines räumlichen Systems an drei Geradenpaaren, welche Gegenkanten eines Tetraeders sind, ist der Identität gleich.*



Sind S_1, S_2, S_3, S_4 die Ecken, $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$, $\mathbf{S}_3$, $\mathbf{S}_4$ die Flächen, s_{23} und s_{14}, s_{31} und s_{24}, s_{12} und s_{34} die Paare von Gegenkanten eines Tetraeders, so ist (81.):

$$\begin{Bmatrix} S_2\, S_3 \\ \mathbf{S}_2\, \mathbf{S}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} s_{23} \\ s_{14} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} S_3\, S_1 \\ \mathbf{S}_3\, \mathbf{S}_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} s_{31} \\ s_{24} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} S_1\, S_2 \\ \mathbf{S}_1\, \mathbf{S}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} s_{12} \\ s_{34} \end{Bmatrix},$$

also:

$$\begin{Bmatrix} s_{23}\; s_{31}\; s_{12} \\ s_{14}\; s_{24}\; s_{34} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_2\;\, S_3\;\, S_3\;\, S_1\;\, S_1\;\, S_2 \\ \mathbf{S}_2\;\, \mathbf{S}_3\;\, \mathbf{S}_3\;\, \mathbf{S}_1\;\, \mathbf{S}_1\;\, \mathbf{S}_2 \end{Bmatrix} = 1,$$

w. z. b. w.

Zusatz zu I und II. *Die Spiegelungen an den drei Spiegelpaaren der Sätze I. und II. bilden zusammen mit der Identität eine Gruppe.*

83. **Satz.** *Die Spiegelungen räumlicher Systeme an folgenden Spiegelpaaren sind vertauschbar:*

1) *an zwei aus Punkt und Ebene bestehenden Paaren, bei denen die Punkte wechselweise in den Ebenen liegen.*

2) *an einem aus Punkt und Ebene und an einem aus zwei Geraden bestehenden Paar, wenn der Punkt in einer der Geraden liegt und die Ebene durch die andere Gerade geht.*

3) *an zwei Geradenpaaren, wenn diese die Gegenkanten eines einfachen räumlichen Vierecks*[1]) *bilden.*

Der Beweis wird wie in 67, Zus. I. geliefert, und zwar folgt 1) und 2) aus Satz I. (81.) und 3) aus Satz II. (82.).

---

1) Unter einem *vollständigen* räumlichen Viereck verstehen wir vier Punkte als Ecken mit den sechs durch je zwei von ihnen gelegten Geraden als Kanten und mit den vier durch je drei von ihnen gelegten Ebenen als Seiten.

Unter einem *einfachen* räumlichen Viereck verstehen wir vier in einer bestimmten Reihenfolge angeordnete Punkte S_1, S_2, S_3, S_4 als Ecken, mit den vier in dieser Reihenfolge gezogenen Verbindungsgeraden $S_1 S_2$, $S_2 S_3$, $S_3 S_4$, $S_4 S_1$ als Kanten und mit den vier durch je drei aufeinander folgende Punkte gelegten Ebenen $S_1 S_2 S_3$, $S_2 S_3 S_4$, $S_3 S_4 S_1$, $S_4 S_1 S_2$ als Seiten.

Zwei Ecken, Kanten und Seiten eines einfachen Vierecks heissen Gegenecken, -Kanten und -Seiten, wenn sie nicht in der oben angeschriebenen Reihenfolge, und in keiner ihrer cyklischen Vertauschungen neben einander stehen.

84. Sind die Ecken, Kanten und Seiten eines Tetraeders (vollständigen Vierecks) wie oben bezeichnet, so erhält man aus den drei Spiegelungen

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ \mathbf{S}_1 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} S_2 \\ \mathbf{S}_3 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} S_3 \\ \mathbf{S}_3 \end{Bmatrix}$$

genau wie in 74. die Gruppe:

$$\begin{matrix} 1 \\ \begin{Bmatrix} S_1 \\ \mathbf{S}_1 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} S_2 \\ \mathbf{S}_2 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} S_3 \\ \mathbf{S}_3 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} S_2\, S_3 \\ \mathbf{S}_2\, \mathbf{S}_3 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} S_3\, S_1 \\ \mathbf{S}_3\, \mathbf{S}_1 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} S_1\, S_2 \\ \mathbf{S}_1\, \mathbf{S}_2 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} S_1\, S_2\, S_3 \\ \mathbf{S}_1\, \mathbf{S}_2\, \mathbf{S}_3 \end{Bmatrix} \end{matrix} \quad \text{oder:} \quad \begin{matrix} 1 \\ \begin{Bmatrix} S_1 \\ \mathbf{S}_1 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} S_2 \\ \mathbf{S}_2 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} S_3 \\ \mathbf{S}_3 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} s_{23} \\ s_{14} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} s_{31} \\ s_{24} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} s_{12} \\ s_{34} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} S_4 \\ \mathbf{S}_4 \end{Bmatrix} \end{matrix}$$

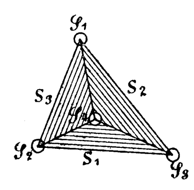
Die Gleichheit der in der vorletzten Zeile rechts und links stehenden Verwandtschaften folgt aus 82; ferner ist:

$$\begin{Bmatrix} S_1\, S_2\, S_3 \\ \mathbf{S}_1\, \mathbf{S}_2\, \mathbf{S}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_1\, s_{23} \\ \mathbf{S}_1\, s_{14} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_1\, s_{14} \\ \mathbf{S}_1\, s_{23} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_4 \\ \mathbf{S}_4 \end{Bmatrix}$$

(nach 82; 78, Anm. I; 82.).

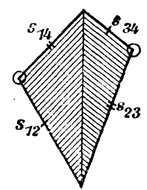
85. Bezeichnet man die sieben Spiegelungen dieser Gruppe kurz mit σ, σ_1, σ_2, ... so bestehen zwischen ihnen im ganzen sieben Gleichungen von der Form $\sigma_1 \sigma_2 \sigma = 1$ (nach 72.). Alle diese Gleichungen sind in den Sätzen I. und II. (81. und 82.) enthalten; denn zur Anwendung des Satzes I. kann man zwei der Ebenen des Tetraeders auswählen und bekommt daraus lauter verschiedene Gleichungen der obigen Form, und zwar in der Anzahl $\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$; die siebente Gleichung ergiebt sich aus dem Satz II. (82.).

Satz. *Man erhält alle sieben Gleichungen von der Form* $\sigma_1 \sigma_2 \sigma = 1$ *durch sechsmalige Anwendung des Satzes I. und durch einmalige Anwendung des Satzes II.*



86. Um alle möglichen Gleichungen von der Form $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma' = 1$ zu finden, hat man (73.) auf alle Weisen vier von den Spiegelungen so heraus zu suchen, dass keine drei von ihnen

von einander abhängig sind. Dies ergiebt die Formeln:



I'. $$\begin{Bmatrix} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_2 & \mathbf{S}_3 & \mathbf{S}_4 \end{Bmatrix} = 1 \quad ,$$

II'. $$\begin{Bmatrix} s_{12} & s_{23} & S_1 & S_3 \\ s_{34} & s_{14} & \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_3 \end{Bmatrix} = 1 \quad ,$$

die folgendermassen direct bewiesen werden:

I'. $$\begin{Bmatrix} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_2 & \mathbf{S}_3 & \mathbf{S}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} s_{12} & s_{34} \\ s_{34} & s_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} s_{12} & s_{12} \\ s_{34} & s_{34} \end{Bmatrix} = 1$$

(nach 81; 78, Anm. I., 78.).

II'. $$\begin{Bmatrix} s_{12} & s_{23} & S_1 & S_3 \\ s_{34} & s_{14} & \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} s_{13} & s_{13} \\ s_{24} & s_{24} \end{Bmatrix} = 1$$

(nach 82; 81; 78.).

Satz I'. *Die Folge der vier Spiegelungen an den aus Punkt und Ebene bestehenden Paaren, deren Punkte die Ecken und deren Ebenen die gegenüberliegenden Seiten eines Tetraeders sind, ist der Identität gleich.*

Satz II'. *Die Folge der vier Spiegelungen an zwei aus Punkt und Ebene und an zwei aus je zwei Geraden bestehenden Paaren, bei denen die Punkte aus zwei Gegenecken, die Ebenen aus den beiden gegenüberliegenden Seiten, die Geradenpaare aus den Paaren von Gegenkanten eines einfachen räumlichen Vierecks bestehen, ist (in jeder Anordnung) der Identität gleich.*

Zusatz. *Man erhält alle sieben Gleichungen von der Form* $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma' = 1$ *durch einmalige Anwendung des Satzes I' und durch sechsmalige Anwendung des Satzes II'.*

Denn die Elemente des Tetraeders sind nur einmal so zu wählen, wie es der Satz I' verlangt, während für II' zwei beliebige Ecken des Tetraeders als Gegenecken eines einfachen räumlichen Vierecks zu wählen sind, wodurch die anderen in II' vorkommenden Elemente völlig bestimmt sind; diese Wahl ist aber auf $\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$ verschiedene Arten zu treffen.

Von Anwendungen der oben entwickelten Sätze sei hier die Theorie der Collineationen erwähnt, die eine Fläche (ein Polarsystem) zweiter Ordnung in sich überführen, ferner die Theorie der Raumcurven vierter Ordnung erster Art, die eine solche Gruppe von projectiven Spiegelungen in sich selbst zulassen. Jede Fläche 2. O. wird nämlich durch Spiegelung an einem aus Pol und Polarebene oder an einem aus zwei conjugirten Geraden bestehenden Paar in sich übergeführt; ist daher das jene Gruppe von Spiegelungen bestimmende Tetraeder ein *Polartetraeder* der Fläche 2. O., so hat man eine Gruppe von vertauschbaren (collinearen) Spiegelungen, die die Fläche in sich überführen.[1]) Und durch dieselbe Gruppe wird eine Raumcurve 4. O. in sich übergeführt, welche der Schnitt der Flächen 2. O. eines Büschels ist, von dem jenes Tetraeder das gemeinsame Polartetraeter ist.

Für Gruppen von 2^ν Verwandtschaften, die alle ausser der Identität senkrechte, schiefe oder projective Spiegelungen sind, bietet die Geometrie der ν-dimensionalen Räume die entsprechenden Beispiele.

1) Ueber solche Gruppen im Raum von ν Dimensionen vgl. Voss, »*Zur Theorie der orthogonalen Substitutionen.*« Math. Ann. XIII (1878.) § V.

BERICHTE

DER

K. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

SITZUNG AM 7. DECEMBER 1891.

Hermann Wiener, *Ueber die aus zwei Spiegelungen zusammengesetzten Verwandtschaften* [1]. Vorgelegt von Prof. ENGEL.

X. Ueber geometrische Uebertragungssätze.

86. In dem Streben, die auf ein Gebiet [2] der Wissenschaft verwandte Geistesarbeit auch für andere Gebiete nutzbar zu machen, haben die Geometer im Laufe der Zeit eine nicht geringe Zahl von *Uebertragungssätzen* aufgestellt, welche gestatten, ganze Reihen von Aufgaben und Sätzen, die in dem einen Gebiet der Geometrie erledigt sind, in ein anderes hinüber zu nehmen. Wir leiteten unsere Betrachtungen mit der Theorie der Bewegungen räumlicher Systeme ein, und es liegt nahe, auf diesem Wege der Uebertragung die gewonnenen Ergebnisse auch für andere Gebiete zu verwenden, oder umgekehrt von analogen Sätzen eines anderen Gebietes ausgehend, wieder auf sie zu kommen.

87. In der That ist es leicht, in der *projectiven Geometrie der Geraden* solche analogen Sätze aufzustellen [3]; dann kann man durch ein von MÖBIUS angegebenes Verfahren die von den Projectivitäten der Geraden handelnden Sätze in solche verwandeln, die sich auf *Kreisverwandtschaften in der Ebene* beziehen; mit Hilfe der stereographischen Projection gelingt es, diese wieder so umzuformen, dass sie den *Kreisverwandtschaften auf der Kugel*

---

1) Diese Arbeit bildet die Fortsetzung der früheren: vgl. diese Berichte 1890 S. 13—23, S. 71—87, S. 245—267, 1891 S. 424—447.

2) Unter einem »Gebiet« soll im folgenden stets eine irgendwie abgegrenzte Menge von Sätzen verstanden sein, die sich auf eine Classe mathematischer Objecte und Operationen beziehen.

3) Die in 87. aufgezählten Uebertragungen sind in den folgenden Nummern ausführlicher behandelt; dort sind auch die Literaturnachweise beigegeben.



angehören; diese aber können als Ausschnitte von allgemeineren Verwandtschaften betrachtet werden, nämlich der *Collineationen des Raumes*, welche die Kugel in sich überführen; durch projective Verallgemeinerung und durch die STAUDT'sche Uebertragung des für reelle Gebilde als richtig erkannten auf imaginäre Gebilde gelangt man von da zur Geometrie derjenigen räumlichen *Collineationen, die eine* (reelle oder imaginäre) *Fläche* 2. *Ordnung in sich überführen*; und stützt man sich endlich noch darauf, dass jede *Bewegung* als eine besondere räumliche Collineation dieser Art betrachtet werden kann (bei der nämlich der unendlich ferne Kugelkreis in sich übergeht), so hat man einen Weg gefunden, auf dem man über die verschiedenartigsten Gebiete hinweg von der projectiven Geometrie der Geraden zur Geometrie der Bewegungen räumlicher Systeme gelangt.

88. Ich will keineswegs die Bedeutung unterschätzt wissen, die solche Gedankenreihen haben, wenn es gilt, einem Gebiete neue Sätze zuzuführen, oder einen ersten Ueberblick über die verschiedenen Gebiete zu gewinnen. Aber sie tragen zu sehr das Gepräge des Vorläufigen und fordern geradezu eine andere Begründung heraus. Wenigstens kann von einer Ersparniss der Geistesarbeit bei der Mannigfaltigkeit der verwendeten Uebertragungen und bei der Menge der vorausgesetzten Vorkenntnisse nicht wohl die Rede sein. Und gerade die Verschiedenheit der Gebiete verlangt, dass die Uebereinstimmung der Sätze nicht als zufällige Folge verschiedener Ursachen erscheine, sondern sich aus einem einheitlichen Grunde ergebe.

Einschub I.

An dieser Stelle ist es vielleicht angebracht, darauf hinzuweisen, wie weit schon rein äusserlich der Zusammenhang der beiden Endglieder in der obigen Kette verfolgt werden kann, während es den folgenden Entwickelungen vorbehalten bleibt, die inneren Gründe für die Aehnlichkeit und für die immer noch hervortretenden Verschiedenheiten aufzudecken. Dabei sind im Wesentlichen die im Vorigen und im Folgenden vorkommenden Sätze über Bewegungen zu vergleichen mit den Sätzen, die ich in einer früheren Arbeit[1]) im Gebiete

1) »Rein geometrische Theorie der Darstellung binärer Formen durch Punktgruppen auf der Geraden«, Darmstadt 1885 (Habilitationsschrift, Halle).

der projectiven Geometrie[1]) entwickelt habe; der Leser möge die entsprechenden Sätze, die einander mit gleichen Bezeichnungen gegenübergestellt sind, gleichzeitig vornehmen.

A. Sätze über Projectivitäten[2]) in der Geraden.

89. a) Unter den projectiven Verwandtschaften zwischen den Punkten einer Geraden giebt es nur *eine Art von Spiegelungen*, die »*Involution*«[3]). Sie kann in zwei wesentlich verschiedenen Formen auftreten, je nachdem sie α) zwei bekannte Doppelpunkte besitzt, durch die dann jedes Paar zugeordneter Punkte der Involution harmonisch getrennt ist, oder β) durch zwei Paare zugeordneter Punkte gegeben ist, gleichviel ob die nun nicht bekannten Doppelpunkte reell oder imaginär sind.

Eine Projectivität ist eine Involution, wenn sich in ihr ein Punktepaar wechselweise entspricht. [Vgl. v. Staudt, Geometrie der Lage Nr. 215.]

b) *Zwei Involutionen heissen harmonisch, wenn ihre Folge wieder eine Involution ist.* [Vgl. Hab.-Schr. 55.]

Jede dieser Involutionen führt die andere in sich über, und umgekehrt ist jede Involution, die eine von ihr verschiedene in sich überführt, zu dieser harmonisch [vgl. diese Reihe von Abhandlungen Nr. 47 und 48].

Insbesondere ist zu einer Involution mit vorgegebenen Doppel-

1) Dem in der projectiven Geometrie bewanderten Leser wird es leicht sein, die folgenden Sätze und Constructionen auf allgemeiner bekanntes zurückzuführen; denn wenn man die Punkte der Geraden, auf denen sich jene abspielen, aus einem Punkte eines Kegelschnittes auf diesen projicirt, so folgt alles übrige aus dem Satze, dass die Verbindungsgeraden von Punkten, die in einer so auf den Kegelschnitt gelegten Involution einander zugeordnet sind, durch einen festen Punkt, das »Involutionscentrum« gehen (dessen Polare zum Kegelschnitt »Involutionsaxe« genannt wird), und aus dem zweiten Satze (der leicht aus dem vorigen abgeleitet wird), dass die Involutionscentra »harmonischer« Involutionen (vgl. 89 b.) zum Kegelschnitt konjugirte Punkte sind.

2) Unter »Projectivität« auf einer Geraden verstehe ich die projective Beziehung der Punkte A .. der Geraden auf die Punkte A' .. derselben Geraden. Die »Umkehrung« ordnet dann den Punkten A' .. die Punkte A .. zu. Zwei Punkte, die sich in der Umkehrung entsprechen, heissen auch »in der Projektivität rückwärts entsprechend.«

In meiner Hab.-Schr. habe ich beide, Projektivität und Umkehrung, unter dem Namen Projektivität zusammengefasst und dann durch den »Sinn« wieder unterschieden. Die andere Bezeichnung ist aber die bessere.

3) Die Involution kann auch als Polarsystem zweiter Ordnung aufgefasst werden (Hab.-Schr. 47.).

punkten jede andere harmonisch, für welche diese Doppelpunkte ein Paar zugeordneter Punkte bilden.

c) *Sind zwei Involutionen gegeben, so ist i. a. eine weitere Involution vorhanden, die gleichzeitig zu beiden harmonisch ist*[1]. [Hab.-Schr. 63.]

d) *Die Gesammtheit aller Involutionen, die zu einer einzigen J harmonisch sind, heisst ein Büschel von Involutionen*[2].

Jede Involution eines gegebenen Büschels ist durch eines ihrer Paare zugeordneter Punkte bestimmt. [Hab.-Schr. 68.]

---

e) *Durch jede gegebene Projectivität $\mathfrak{P}$ ist zugleich eine gewisse Involution, die »zugehörige Involution«, bestimmt.*

Hat die Projectivität Doppelpunkte, so hat die zugehörige Involution die selben, sie wird daher auch vielfach *»Doppelpunktinvolution«* genannt.

Ein Paar zugeordneter Punkte A, A' dieser Involution ist harmonisch zu den beiden Punkten A_{-1} und A_1, die einem von ihnen, etwa dem A, in $\mathfrak{P}$ rückwärts und vorwärts entsprechen[3]. [Hab.-Schr. 37.]

Eine Projectivität ist völlig bestimmt, wenn von ihr die zugehörige Involution und ein Paar entsprechender Punkte gegeben ist. [Hab.-Schr. 41.]

In dieser Involution ist jedem Punktepaar A, A_1, das sich in $\mathfrak{P}$ entspricht, wieder ein solches Paar A', A_1' zugeordnet; *daher wird die ganze Projectivität $\mathfrak{P}$ durch ihre zugehörige Involution in sich selbst übergeführt, und ebenso geht umgekehrt die Involution durch $\mathfrak{P}$ in sich über.*

f) *Bildet man von zwei Involutionen I_1 und I_2 die Folge, so erhält man eine Projectivität $I_1 I_2 = \mathfrak{P}$, deren zugehörige Involution J diejenige ist, die sowohl zu I_1, wie zu I_2 harmonisch ist* (vgl. c). [Hab.-Schr. 64.]

---

1) Haben die beiden Involutionen einen gemeinsamen Doppelpunkt, so artet die zu ihnen harmonische Involution in eine Beziehung aus, welche jedem beliebigen Punkt jenen gemeinsamen Doppelpunkt zuordnet. Die Beziehung ist keine »Verwandtschaft« in dem von uns gebrauchten Sinne.

2) Um den Fall der ausgearteten Involution und des daraus entspringenden Büschels nicht gesondert behandeln zu müssen (wie es Hab.-Schr. 53, 54, 67, 73. geschehen ist), wird man gut thun eine andere Definition des Büschels zu Grunde zu legen, auf die später hingewiesen wird (106a, Fussnote 2).

3) Man vergleiche auch: H. SCHRÖTER, Journ. f. Math. LXXVII, 120 u. 121, M. PASCH, Journ. f. Math. XCI, 349—351. Einen sehr einfachen geometrischen Beweis des Satzes hat auch C. SEGRE, gegeben: Journ. f. Math. C, 320.

g) *Umgekehrt lässt sich jede Projectivität, die J zur zugehörigen Involution hat, als Folge von zwei zu J harmonischen Involutionen darstellen*, von denen die eine aus dem Büschel der zu J harmonischen Involutionen beliebig herausgegriffen werden kann, während die andere, die dadurch völlig bestimmt ist, auch diesem Büschel angehört.

Anmerkung. Diese Umkehrung ist in meiner Hab.-Schr. nicht ausgesprochen, ich füge deshalb hier den Beweis ein.

Ist I_1 eine beliebige zu J harmonische Involution, welche einen Punkt A in B überführen möge, so giebt es eine einzige zu J harmonische Involution I_2 (nach d), welche B in den Punkt A_1 überführt, der dem A in $\mathfrak{P}$ entspricht.

Die Folge $I_1 I_2$ ist nun eine Projectivität, welche, wie $\mathfrak{P}$, J zur zugehörigen Involution (nach f) und A, A_1 zu entsprechenden Punkten hat. Da es aber (nach e) nur eine solche Projectivität giebt, so ist $\mathfrak{P} = I_1 I_2$, w. z. b. w.[1]).

h) Zu jeder Projectivität $\mathfrak{P}$ ist daher ein ganzer Büschel von Involutionen $I_1, I_2 \cdots$ zugeordnet, nämlich alle diejenigen, welche zur zugehörigen Involution J harmonisch sind.

In einer jeden solchen Involution I ist einem Punktepaar A, A_1, das sich in $\mathfrak{P}$ entspricht, ein Punktepaar B_1, B zugeordnet, das sich in $\mathfrak{P}^{-1}$ entspricht.

Jede der Involutionen I führt daher die Projectivität $\mathfrak{P}$ in ihre Umkehrung $\mathfrak{P}^{-1}$ über.

Umgekehrt gehört jede Involution, in der einem Paare entsprechender Punkte A, A_1 von $\mathfrak{P}$ ein Paar B_1, B von $\mathfrak{P}^{-1}$ zugeordnet ist, dem Büschel an.

---

i) Besonders wichtig ist *das System der Projectivitäten, die dieselbe zugehörige Involution J besitzen*, die man also erhält, wenn man auf alle mögliche Arten die Folgen von je zwei Involutionen I bildet. Sie ergeben *eine Gruppe* [Hab.-Schr. 46.] *vertauschbarer* [Hab.-Schr. 45.] *Verwandtschaften.*

---

k) Ausser dem angeführten behandelte ich damals noch diejenigen weiteren Systeme von Projectivitäten, (Büschel von Projectivitäten), die eine gegebene Involution (Projectivität) im gleichen Sinne in dieselbe andere überführen[2]).

---

1) Analog ist der Beweis zu führen, wenn die zweite Involution beliebig aus dem Büschel herausgegriffen werden soll.

Wir geben später (94, a.) einen andern Beweis für diese Zerlegung, der auch für den Fall gilt, dass die Involution J ausartet.

2) Meine Untersuchungen über *Büschel von Projectivitäten*, die ich gleichzeitig mit dem Thema meiner Hab.-Schr., den Polargruppen (im

l) *Die Zusammensetzung zweier Projectivitäten* $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ zu einer einzigen neuen lässt sich sofort aus dem gesagten ableiten. Ist nämlich I die Involution, die gleichzeitig zu den zu $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ zugehörigen Involutionen harmonisch ist (vgl. c), so kann man setzen (vgl. g):

$$\mathfrak{P} = HI\,, \quad \mathfrak{Q} = IK\,,$$

wo H und K völlig bestimmte Involutionen sind; dann wird

$$\mathfrak{P}\mathfrak{Q} = HIIK = HK\,.$$

A′. Sätze über Bewegungen starrer räumlicher Systeme.

90. Die Bewegungen haben eine wichtige Eigenschaft vor den projectiven Verwandtschaften voraus, die darin besteht, dass jeder »*Umwendung*« ein bestimmtes räumliches Element, nämlich eine *Gerade* (die Umwendaxe), zugeordnet ist, und umgekehrt jeder Geraden eine einzige Umwendung. Dadurch ist es meist möglich, einen Satz in zweierlei Gestalt auszudrücken, einmal als Verwandtschaftsbeziehung zwischen Umwendungen, das andere Mal als Lagenbe-

Jahre 1884) bearbeitet hatte, nahm ich nicht in die Hab.-Schr. auf, da sie über die dort gezogenen Grenzen hinausgingen. Inzwischen bin ich durch eine Arbeit von C. SEGRE der Veröffentlichung über diesen Gegenstand überhoben worden (»Note sur les homographies binaires et leurs faisceaux« Journ. f. Math. C, 317—330, 1887).

Ich hatte damals den Büschel von Projectivitäten als die Gesammtheit von Projektivitäten betrachtet, welche eine gegebene Involution in ein und demselben Sinne in dieselbe andere Involution überführen*) während SEGRE durch Betrachtung aller Projektivitäten, die zu einer gegebenen harmonisch sind, zu denselben Resultaten, wie ich damals, kommt, die er durch eine wichtige Construktion und durch eine schöne Anwendung vermehrt (a. a. O. Nr. 15. und 16.).

Zugleich hat SEGRE (nach dem Vorgange von STEPHANOS, Math. Ann. XXII, 310 ff.) die Bezeichnung der Operations-Rechnung auf Projektivitäten angewandt und dadurch auch manchen Sätzen meiner Hab.-Schr. den kurzen und handlichen Ausdruck gegeben, den ich oben angenommen habe.

Dagegen kann ich mich mit denjenigen Beweisen SEGRE's nicht einverstanden erklären, bei denen er eine Vereinfachung durch Unterscheidung der (nicht rational gegebenen) *reellen* und *imaginären* Doppelpunkte herbeizuführen sucht. Denn Sätze, die unabhängig von dem besondern Reellitätsverhältniss gelten, müssen meines Erachtens auch unabhängig davon bewiesen werden.

*) Die Sätze des V. Abschnitts der vorliegenden Reihe (Nr. 22. bis 28.) bilden die Uebertragung jener Sätze auf Bewegungen.

ziehung zwischen Geraden; wir werden öfters nur die letztere einfachere Form wählen.

Dann haben wir den Sätzen über Projectivitäten die folgenden Sätze gegenüber zu stellen:

a') Es giebt nur *eine Art involutorischer Bewegungen: die Umwendungen* (Spiegelungen an einer Geraden).

Dies folgt aus der Definition der Spiegelung und aus dem Satze:

Eine Bewegung, bei der ein einziges Punktepaar seine Lage vertauscht, ist eine Umwendung [vgl. diese Reihe von Abhandlungen Nr. 15.].

b') Zwei Umwendungen, deren Folge wieder eine Umwendung ist, heissen *harmonisch.*

Die Axen zweier harmonischer Umwendungen treffen sich senkrecht.

Beweis. Sind a, b zwei Geraden, und $\{a\}$, $\{b\}$ die Umwendungen um sie, so sind diese Umwendungen harmonisch, wenn

$$\{ab\} = \{c\},$$

ist, wobei $\{c\}$ die Umwendung um die dritte Gerade c bedeutet. Aus dieser Gleichung folgt aber:

$$\{ab\}^2 = 1 \quad \{ab\} \neq 1$$

oder:

$$\{ab\} = \{ba\}.$$

Es sei nun P ein Punkt von a, der um b in P' umgewandt wird; dann ist

$$P\{a\}P\{b\}P' \quad \text{oder} \quad P\{ab\}P'.$$

Den Punkt P'', der aus P durch $\{ba\}$ hervorgeht, finden wir so:

$$P\{b\}P'\{a\}P'' \quad \text{d. h.} \quad P\{ba\}P''.$$

Da aber

$$\{ab\} = \{ba\},$$

so ist P'' mit P' identisch, d. h. P' wird durch die Umwendung um a in sich übergeführt, liegt also auf der Geraden a. Da demnach a zwei Punkte P, P' verbindet, die durch die Umwendung um b in einander übergehen, so wird b von a senkrecht geschnitten.

Die Umkehrung dieses Satzes ist in Nr. 9, Zusatz II. ausgesprochen.

c') *Zu zwei beliebigen Umwendungen giebt es stets eine dritte, die gleichzeitig zu beiden harmonisch ist.*

Dieser Satz deckt sich (nach b') mit dem bekannten: Zu zwei beliebigen Geraden kann stets eine weitere gefunden werden, die beide senkrecht trifft.

d') Es giebt ein ganzes *Strahlsystem* von Geraden, die eine gegebene senkrecht treffen.

---

e′) Zu jeder Bewegung $\mathfrak{B}$ giebt es (i. a. nur) eine ausgezeichnete Gerade, die *Schraubenaxe*, *welche bei der Bewegung in sich* (und zwar mit Beibehaltung ihres Sinnes) *übergeht.*

Sind A_{-1}, A, A_1 drei Punkte, die sich in der Bewegung auf einander folgen (d. h. geht A_{-1}, A durch $\mathfrak{B}$ in A, A_1 über), so trifft die Gerade, um welche A in sich, A_{-1} in A_1 umgewandt wird, die Schraubenaxe senkrecht (19.).

f′) *Die Folge zweier Umwendungen ist eine Schraubung,* deren Axe die Umwendaxe senkrecht trifft (10, Satz).

g′) *Umgekehrt lässt sich jede Schraubung als Folge zweier Umwendungen darstellen,* von denen die Axe der einen, die Schraubenaxe senkrecht treffend, beliebig angenommen werden kann, während die andere dadurch bestimmt ist (10, Umkehrung).

h′) Die Geraden, welche die Schraubenaxe senkrecht treffen, haben die Eigenschaft, dass um sie zwei in der Bewegung $\mathfrak{B}$ auf einander folgende Punkte A, A_1 in zwei in $\mathfrak{B}^{-1}$ auf einander folgende Punkte B_1, B umgewandt werden; d. h.: *Die Bewegung $\mathfrak{B}$ geht durch Umwendung um irgend eine die Schraubenaxe senkrecht schneidende Gerade in ihre Umkehrung über*[1]).

i′) *Alle Schraubungen, die dieselbe Schraubenaxe haben, nebst den Schiebungen in der Richtung der Schraubenaxe bilden eine Gruppe vertauschbarer Verwandtschaften.*

Beweis folgt später.

---

k′) Es giebt ein ganzes System von Bewegungen, die eine Gerade in demselben Sinne in eine andere Gerade überführen.

Die Eigenschaften dieses Systems sind im V. Abschnitt behandelt und werden im Folgenden noch weitere Berücksichtigung finden.

---

l′) Zwei beliebige Bewegungen werden *zusammengesetzt,* indem man jede so in zwei Umwendungen zerlegt, dass die zweite Umwendung der ersten Bewegung mit der ersten Umwendung der zweiten Bewegung identisch ist (11.).

91. Ehe wir an die Frage herantreten, ob es eine einzige Uebertragung giebt, die umfassend genug wäre, um jene verschiedenartigen Gebiete in gegenseitige Verbindung zu bringen, müssen wir uns klar machen, was man alles von einer guten Uebertragung verlangen darf. In der Fülle der zu Eingang erwähnten Uebertragungen haben wir ein hinlängliches Material gewonnen,

---

1) Die Umkehrung dieses Satzes, dass nämlich zwei einander entsprechende Punkte A, A_1 in zwei einander rückwärts entsprechende Punkte B_1, B umgewandt werden können, gilt nur für den Fall, dass A und B gleichweit von der Schraubenaxe entfernt sind.



um gewisse Gruppen unterscheiden zu können, ohne dass wir damit eine strenge Eintheilung beabsichtigen.

a) Die einfachsten Uebertragungen sind solche, wie der Uebergang von der Ebene auf die Kugel (stereographische Projection), oder von der Kugel auf eine beliebige (nicht geradlinige) Fläche zweiter Ordnung (projective Verallgemeinerung); bei ihnen werden die Elemente eines geometrischen Gebildes eindeutig auf die Elemente eines anderen Gebildes bezogen, das in diesen Elementen dieselbe Dimensionenzahl aufweist. Solche Uebertragungen können entweder projective (collineare oder reciproke) Beziehungen sein, wobei der Ausdruck der Sätze beibehalten oder dual verwandelt wird, und nur bei der Uebertragung *metrischer* Sätze insofern eine grössere Veränderung erleidet, als für das Abtragen gleicher Strecken und für das Fällen von senkrechten Geraden ein projectives Analogon einzuführen ist — oder aber die Uebertragungen sind allgemeinerer Natur, wie z. B. wenn einer Geraden eine Curve entspricht; dann werden die auf dem einfacheren Gebilde (der Geraden) gewonnenen Sätze unmittelbar auf das schwierigere Gebilde bezogen[1]).

In diesen Fällen haben wir eine Uebertragung, bei der von einem geometrischen Gebilde nicht nur die Elemente auf ein anderes abgebildet werden, sondern gleichzeitig auch die daran geknüpften Sätze. Wir nennen sie kurzweg Abbildungen.

Hierher gehören auch die allgemeineren *mehrdeutigen* Abbildungen.

b_1) Eine zweite Art von Uebertragungen schliesst sich an die nicht projectiven Uebertragungen der Gruppe a) an. Als Beispiel kann uns diejenige dienen, welche die Kreisverwandtschaft auf der Kugel in Verbindung setzt mit einer Collineation des Raumes. Um das Wesen einer derartigen Uebertragung deutlich zu machen, gehen wir auf einen noch einfacheren Fall zurück. Die unter a) besprochene Uebertragung einer Geraden auf einen Kegelschnitt gestattet von einer Involution (und ebenso gut auch von einer Projectivität) zu sprechen, die zwischen den Punkten eines Kegelschnittes besteht. Da diese so auf den Kegelschnitt gelegten Punktinvolutionen die Eigenschaft haben,

---

1) Eine solche Uebertragung ist z, B. auch die von Clebsch geleistete Abbildung der Fläche dritter Ordnung auf die Ebene. Man vergl. Journ. f. Math. LXV, 359. (1866.) und besonders Math. Ann. V, 419. (1872.)

alle Verbindungsgeraden zugeordneter Punkte durch einen festen Punkt der Ebene — das Involutionscentrum — zu schicken, so ist jeder Involution des Kegelschnittes (oder auch der Geraden, deren Bild der Kegelschnitt ist) ein Punkt der Ebene zugeordnet, und wir haben damit das sogenannte HESSE'sche Uebertragungsprincip[1]) gewonnen. Da aber alle Involutionen auf der Geraden eine zweifach unendliche Mannigfaltigkeit sind, so haben wir doch wieder nur eine Abbildung auf ein Gleichdimensionales geleistet, wie wir sie schon unter a) betrachteten, und dasselbe gilt von der von HESSE angedeuteten und seinen Nachfolgern zu einer schönen Theorie ausgebauten Uebertragung von den Punktetripeln der Geraden auf die Punkte des Raumes, die durch die Raumcurve 3. Ordnung vermittelt wird, u. s. w.[2]).

Einen wesentlichen Schritt weiter hat schon vor HESSE mit diesen Sätzen STAUDT gethan, indem er der Involution auf dem Kegelschnitt eine collineare Spiegelung der Ebene zuordnet, nämlich die Spiegelung an dem aus Involutionscentrum und seiner Polaren bestehenden Paar[3]), und allgemeiner, indem er jeder Projectivität der Punkte des Kegelschnitts eine ebene Collineation zuordnet[4]), durch die der Kegelschnitt genau in derselben Weise in sich übergeführt wird, wie dies durch jene Projectivität geschieht. Ebenso zieht eine Verwandtschaft, welche die Punkte einer Regelfläche zweiter Ordnung dadurch in andere Punkte dieser Fläche übergehen lässt, dass jede der beiden Regelscharen projectiv in sich übergeführt wird, eine Collineation des Raumes nach sich, bei der die Fläche genau in der verlangten Weise mit verändert wird[5]).

---

1) O. HESSE, »Ein Uebertragungsprincip«. Journ. f. Math. LVI, 15 (1866).

Die Involution, von der oben die Rede ist, ist der geometrische Ausdruck von der Gleichung zweiten Grades, von der HESSE in seiner analytischen Darstellung ausgeht.

2) Man vergleiche z. B. FRANZ MEYER: »Ueber Apolarität und rationale Kurven«.

3) v. STAUDT, »Geometrie der Lage« Nr. 276, III (1847).

Ueber die Ausdrucksweise: »Spiegelung an einem Paar« vgl. meine vorige Abhandlung Nr. 78. (Diese Berichte 1891, S. 439.)

4) v. STAUDT, ebenda, am Anfang von Nr. 276.

5) v. STAUDT, »Beiträge zur Geometrie der Lage« Nr. 8 (1856).

Bei diesen Uebertragungen wird durch eine Beziehung der Elemente eines geometrischen Gebildes eine sie umfassende Beziehung in einem Gebilde von höherer Dimension hervorgerufen. Wir bezeichnen sie als Abbildungen mit Erweiterung.

b_2) Wenn man mit Staudt[1]) als Regelfläche auch eine solche Fläche zweiter Ordnung bezeichnet, die keine *reellen* sondern nur *imaginäre* Geraden enthält, also z. B. die Kugel (oder das Ellipsoid), so gelten die vorhin erwähnten Uebertragungen, die aus einer Beziehung der *Regelfläche* eine räumliche Collineation ableiten, ebenso gut für die Kugel. Der Uebergang geschieht durch das *Imaginäre* hindurch, und das ist derselbe Weg, den Möbius[2]) eingeschlagen hat, um von der projectiven Geometrie der Geraden zur Kreisverwandtschaft in der Ebene zu kommen, nur verfährt Staudt geometrisch, Möbius analytisch. Ordnet man nämlich den Punkten einer Geraden die reellen Zahlen (als Abscissen) zu, so lassen sich Beziehungen zwischen den Punkten der Geraden durch *Gleichungen* zwischen den entsprechenden Zahlen ausdrücken. Setzt man in diesen Gleichungen *complexe* Zahlen statt der reellen ein und deutet diese wieder als Punkte einer Ebene, so wird die Gleichung nun eine Beziehung zwischen den Punkten der Ebene zum Ausdruck bringen, so dass hiermit die Uebertragung von der Geraden auf die Ebene geleistet ist[3]).

Diese *geometrische* Uebertragung wird bewirkt durch den *analytischen* Uebergang von den reellen zu den complexen Zahlen, und dieser wird ermöglicht durch die Gemeinsamkeit der Rechenregeln für beide Zahlgebiete. Es sind ganz wenige Grundgesetze, das associative und commutative Gesetz für die Addition und für die Multiplication und das distributive Gesetz für die Verbindung beider, aus denen alle übrigen Sätze des Zahlenrechnens hergeleitet werden, und da diese *Grundgesetze*

---

1) v. Staudt, »Beiträge« Nr. 174 und 3. Heft, Vorwort (1860).

2) Möbius: »Ueber eine Methode um von Relationen, die der Longimetrie angehören, zu entsprechenden Sätzen der Planimetrie zu gelangen«. Diese Berichte Band V, 1852.

Sieben Abhandlungen von Möbius über Kreisverwandtschaften (1852 bis 1858) bilden die dritte Gruppe des Bandes II der gesammelten Werke.

3) F. Klein hat in seinen Leipziger Vorlesungen die Methoden von Staudt und von Möbius in eigenartiger Weise zur Ableitung der Sätze über Kreisverwandtschaften verknüpft.

sowohl für reelle, wie für complexe Zahlen gelten, so gelten auch die daraus abgeleiteten Sätze für beide Gebiete.

Nun knüpfen sich aber ganz analoge Ueberlegungen an die STAUDT'sche Lehre vom Imaginären. Da seine »Geometrie der Lage« im Wesentlichen auf den Operationen des *Verbindens* und *Schneidens* der geometrischen Elemente — Punkt, Gerade und Ebene — beruht, und in den projectiven Beziehungen der aus diesen Elementen bestehenden Gebilde gipfelt, so gelingt es ihm nach seiner scharfsinnigen Einführung der neuen Elemente — imaginärer Punkt, imaginäre Gerade erster und zweiter Art und imaginäre Ebene — seine Theorie auch auf die daraus zusammengesetzten Gebilde zu erweitern, dadurch, dass jene Grundoperationen des Verbindens und Schneidens für die neuen Elemente definirt und ihre Haupteigenschaft, die der projectiven Beziehungen, daraus hergeleitet werden.

Beide Male, bei MÖBIUS, wie bei STAUDT, haben wir es also mit einem gewissen Grundstock von Operationen und von Gesetzen zu thun, aus denen alle übrigen Sätze durch einen gewissen Algorithmus oder eine *Analysis* (in dem schon früher gebrauchten weiteren Sinne des Wortes) gewonnen werden; die Uebertragung von irgend einem Gebiet auf ein anderes besteht alsdann darin, dass, wenn in beiden diese Grundlagen übereinstimmen, auch alles Uebrige übereinstimmen muss.

Und nun sehen wir, dass auch die unter b_1) aufgeführten Uebertragungen den eben genannten sehr nahe verwandt sind; denn auch dort ist es eine *Operation*, nämlich die Beziehung des Kegelschnittes (der Regelfläche) in sich, welche in dem beschränkten Gebiet mit der allgemeineren Operation der Collineation der Ebene (des Raumes) übereinstimmt.

Die Zahl der Dimensionen kann sich bei den auf gemeinsamen Grundoperationen begründeten Uebertragungen erhöhen; dies zeigt bereits das vorige Beispiel und tritt noch deutlicher bei der GRASSMANN'schen Streckenlehre zu Tage. Die Addition der Strecken eines Raumes beliebiger Dimension gehorcht nämlich wieder denselben Grundgesetzen, wie die Addition der Zahlen; folglich sind die auf Streckenaddition beruhenden Sätze — wie z. B. die Schwerpunktsätze — allen Dimensionen gemein.

Wir fassen das Ergebniss nochmals zusammen:

Man kommt zu Uebertragungen, die nicht die geometrischen Gebilde, sondern die Sätze von einem Gebiet der Geometrie auf

ein anderes abbilden, wenn beide Gebiete auf gemeinsame Grundgesetze zurückzuführen sind. Wir nennen sie formale Uebertragungen.

Wichtige *Beispiele* hierfür werde ich in einem der folgenden Abschnitte ausführlich behandeln.

92. Das Gesagte leitet darauf hin, dass man jedes geometrische Gebiet auf seine Grundlagen, d. h. seine Grundoperationen und seine Grundgesetze zurückführen sollte. Es muss ja möglich sein — und darauf hat schon Leibniz hingewiesen — die verschiedenen Gebiete der Wissenschaft überhaupt und der Geometrie insbesondere durch rein formale Combinationen zu behandeln, wenn es nur gelingt, alle thatsächlichen Bedingungen, die dem Gebiet zu Grunde liegen, in eine geringe Zahl von Grundformeln hineinzuzwängen; die weitere Entwickelung bleibt dann der aus den Grundformeln entspringenden Analysis überlassen.

Die Brauchbarkeit einer solchen Analysis wird von der Anzahl specieller Annahmen abhängen, die zu ihrer Begründung nöthig sind, und am grössten sein, wenn es gelingt, sie ganz unabhängig von geometrischen Voraussetzungen aus sich heraus zu entwickeln, d. h. durch rein logische Schlussfolgerungen aus gegebenen Definitionen; erfüllt sie diese Bedingung, so ist sie eine *in sich begründete Analysis*. Ihre Entwickelung bildet dann eine selbständige Theorie, und die *geometrischen* Grundlagen irgend eines damit zu behandelnden Gebietes können nur an der Stelle zur Einwirkung kommen, wo es gilt, die Formeln jener Analysis in die geometrischen Betrachtungen einzuführen.

93. Dass es wirklich geometrische Analysen giebt, die dieser gesteigerten Anforderung genügen, lässt sich an einem uns vertrauten Beispiel zeigen:

Die Analysis der Verwandtschaften, und insbesondere die Analysis der Spiegelungen ist in sich begründet.

Denn ausgehend von den *Definitionen* der »Verwandtschaft« (31, 32.), der »Folge« zweier Verwandtschaften, der »Identität«, der »Umkehrung« einer Verwandtschaft[1]), der »Gleichheit« zweier

1) Die Forderung, die Folge zweier Verwandtschaften bilden zu können, ist nur bei solchen Beziehungen erfüllt, die im allgemeinen (d. h. abgesehen von Ausnahmeelementen) *eindeutig* sind. *Mehrdeutige* Beziehungen müssen auf eindeutige zurückgeführt werden, wie das auch sonst gebräuchlich ist, z. B. in der Functionentheorie durch Uebereinanderlegen

Verwandtschaften (33.) konnten wir *zwei Grundgesetze* ableiten, nämlich das *Gesetz der Umkehrung der Verwandtschaften* (33.) und das *associative Gesetz* (34.). Als Grundgesetze sind diese deshalb zu bezeichnen, weil zu ihrem Beweis ein Zurückgehen auf die *Begriffe* nöthig war, nämlich auf die als existirend angenommenen, sonst aber willkürlich gelassenen *Systeme* und auf die zwischen ihnen bestehenden Verwandtschaften. Aus diesen beiden Gesetzen sind alle übrigen Sätze des VI. Abschnittes (Ueber das Rechnen mit Verwandtschaften), und nach Hinzufügen der Definition der »Spiegelung« (involutorischen Verwandtschaft) auch die Sätze des VII. Abschnittes (Ueber das Rechnen mit involutorischen Verwandtschaften) rein formal hergeleitet worden.[1])

---

mehrerer Blätter. Man vergleiche, was H. J. GRASSMANN über die Nothwendigkeit sagt, die mehrdeutigen Grössen aus der Mathematik zu verbannen (»Ausdehnungslehre von 1862, Nr. 348, Anmerkung).

1) Die »Grundgesetze« (die übrigens im VI. Abschnitt nicht als solche besonders bezeichnet sind) unterscheiden sich schon rein äusserlich von den übrigen Sätzen dadurch, dass zu ihrem Beweise die Klammerbezeichnungen — $\Sigma\{\mathfrak{A}\}\Sigma'$, u. s. w. — verwendet werden müssen, während die übrigen Sätze aus Verwandtschaftsgleichungen folgen.

Man kann die »Umkehrung« einer Verwandtschaft $\mathfrak{A}$ auch anders wie in Nr. 33, nämlich rein *formal*, definiren als diejenige Verwandtschaft $\mathfrak{A}'$, für welche die Gleichung gilt:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}' = 1 ;$$

dann lautet das

Gesetz der Umkehrung: *Ist von zwei Verwandtschaften $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ die zweite die Umkehrung der ersten, so ist auch die erste die Umkehrung der zweiten.*

Beweis. Aus

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}' = 1$$

folgt,

$$\Sigma\{\mathfrak{A}\}\Sigma'\{\mathfrak{A}'\}\Sigma$$

und daraus:

$$\Sigma'\{\mathfrak{A}'\}\Sigma\{\mathfrak{A}\}\Sigma' ,$$

da diese Formel für *jedes* in Σ' enthaltene Element gilt, so ergiebt sie die Gleichung:

$$\mathfrak{A}'\mathfrak{A} = 1 , \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Dass es zu jeder Verwandtschaft eine Umkehrung giebt, ist eine *Annahme*, die das Gebiet der Betrachtung einschränkt.

Im 35. Satze ist unnöthiger Weise auf die Klammerbezeichnungen zurückgegangen. Setzt man nämlich:

$$\mathfrak{A}\,..\,\mathfrak{B} = \mathfrak{J} , \quad \mathfrak{C}\,..\,\mathfrak{D} = \mathfrak{K} , \quad \mathfrak{E}\,..\,\mathfrak{F} = \mathfrak{L} , \quad \mathfrak{G}\,..\,\mathfrak{H} = \mathfrak{M} ,$$

so folgen aus der dort gemachten Voraussetzung:

94. Die Frage von der wir ausgiengen, ob es eine Uebertragung giebt, welche die verschiedenartigen an die Spitze gestellten geometrischen Gebiete (87.) mit einander verbindet, ist jetzt dahin abzuändern, ob es eine Analysis giebt, die gleichmässig auf alle jene Gebiete angewandt werden kann. Die Antwort liegt in dem

Satz. *Die folgenden Verwandtschaften, nämlich:*

1) *Die Projectivität in der Geraden,*
2) *die Kreisverwandtschaft in der Ebene (bezw. auf der Kugel),*
3) *die ebene (räumliche) Collineation, die eine Curve (Fläche) zweiter Ordnung in sich überführt,*
4) *die Bewegungen starrer räumlicher Systeme, und ebenso auch die Verwandtschaft symmetrisch-gleicher räumlicher Systeme,*

lassen sich sämmtlich als Folgen zweier Spiegelungen darstellen [1].

Der *Beweis* von 1) und 4) möge unten folgen, der von 2) und 3) ist bei der Behandlung der einzelnen Gebiete, die ich mir

---

$$\mathfrak{A}\,..\,\mathfrak{B} = \mathfrak{E}\,..\,\mathfrak{F} \quad \text{und} \quad \mathfrak{C}\,..\,\mathfrak{D} = \mathfrak{G}\,..\,\mathfrak{H}$$

die Gleichungen:

$$\mathfrak{I} = \mathfrak{L} \quad \text{und} \quad \mathfrak{K} = \mathfrak{M}\,;$$

Ersetzt man nun in der selbstverständlichen Gleichung:

$$\mathfrak{I}\mathfrak{K} = \mathfrak{I}\mathfrak{K}$$

die rechts stehenden Verwandtschaften durch die ihnen gleiche, so wird

$$\mathfrak{I}\mathfrak{K} = \mathfrak{L}\mathfrak{M}\,,$$

oder

$$\mathfrak{A}\,..\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\,..\,\mathfrak{D} = \mathfrak{E}\,..\,\mathfrak{F}\,\mathfrak{G}\,..\,\mathfrak{H}\,, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

1) Dies soll natürlich nicht eine Zusammenstellung der überhaupt möglichen Fälle, sondern nur der in Nr. 87. angeführten Beispiele sein.

Bei Untersuchungen, die ich während des Druckes der vorliegenden Arbeit anstellte, hat sich ergeben, dass sich nicht nur jede (ebene und räumliche) Collineation als Folge zweier Spiegelungen darstellen lässt (was bekannt ist) — wenn man nämlich die Polarsysteme als (reciproke) Spiegelungen auffasst, (vgl. Staudt »Geom. d. Lage« 213.) — sondern auch jede Reciprocität (in der Ebene und im Raum), nämlich als Folge einer collinearen und einer reciproken Spiegelung.

Ich hielte es für eine dankbare Aufgabe unter den Cremona'schen Verwandtschaften diejenigen zu bestimmen, die Spiegelungen (involutorisch) sind, und zu untersuchen, in welcher Weise sich eine beliebige Cremona'sche Verwandtschaft als Folge von Cremona'schen Spiegelungen ausdrücken lässt. Dass diese Zerlegung in eine endliche Anzahl von quadratischen (Cremona'schen) Spiegelungen stets möglich ist, folgt aus bekannten Sätzen.

für eine andre Gelegenheit vorbehalte, zu erbringen. Um ihn in jedem Falle zu führen, kann es immerhin angebracht sein auch die früheren Uebertragungen, wie die stereographische Projektion, auszunutzen. In diesen Beweisen kommen die Eigenthümlichkeiten der einzelnen Gebiete zum Ausdruck.

Der innere Zusammenhang der allen Gebieten gemeinsamen Sätze ergiebt sich dann aus der auf alle anwendbaren Analysis der Verwandtschaften, die sich aus zwei Spiegelungen zusammensetzen lassen. Diese Analysis zu entwickeln ist die Aufgabe des nächsten Kapitels.

Vorher geben wir die Beweise für den Satz 1) und 4).

a) **Satz.** *Jede Projectivität lässt sich als Folge zweier Involutionen darstellen*[1].

Man suche in der gegebenen Projectivität $\mathfrak{P}$ zu irgend einem Punkte A_1, der sich nicht selbst entspricht, den rückwärts und den vorwärts entsprechenden Punkt A_0 und A_2, d. h.

$$A_0 A_1 \{\mathfrak{P}\} A_1 A_2 ,$$

wo nach Voraussetzung A_1 nicht mit A_0 und A_2 identisch ist. Nun ist eine Involution I_1 dadurch bestimmt, dass man in ihr A_0, A_2 als ein Paar zugeordneter Punkte und A_1 als einen Doppelpunkt annimmt, und es ist:

$$A_2 A_1 \{I_1\} A_0 A_1 \{\mathfrak{P}\} A_1 A_2 ,$$

also

$$A_2 A_1 \{I_1 \mathfrak{P}\} A_1 A_2 .$$

$I_1 \mathfrak{P} = I_2$ ist eine Projectivität, in der sich ein Punktepaar wechselweise entspricht, d. h.[2] eine *Involution,* und es wird:

$$\mathfrak{P} = I_1 I_2 \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Ist $\mathfrak{P}$ eine Involution, so fällt A_2 mit A_0 zusammen; der Beweis bleibt derselbe.

b) **Satz.** *Ein räumliches System lässt sich in jedes ihm gleiche System durch die Folge zweier Spiegelungen überführen, und zwar durch Spiegelung an zwei Geraden, wenn die Systeme kongruent sind, durch Spiegelung an einer Ebene und an einer Geraden, wenn sie symmetrisch sind.*

In der Verwandtschaft (Bewegung oder Stülpung) $\mathfrak{A}$, welche

---

1) In Nr. 84, g. ist für diesen Satz ein anderer Beweis gegeben, der aber die Kenntniss der Doppelpunktsinvolution voraussetzt.

2) Vgl. 89, a.

das eine System Σ in das andere (kongruente oder symmetrische) Σ' überführt, mögen einem Punkte A_1 nach rückwärts und vorwärts die Punkte A_0 und A_2 entsprechen, so dass also gilt:

$$A_0 A_1 \{\mathfrak{A}\} A_1 A_2 .$$

Dabei hat die Strecke $A_0 A_1$ dieselbe Länge wie $A_1 A_2$, d. h. $A_0 A_1 A_2$ ist im allgemeinen ein gleichschenkeliges Dreieck (im besonderen können auch beide Geraden nach derselben oder nach verschiedenen Seiten hin zusammenfallen). Es giebt daher stets eine Gerade s und eine Ebene S (im besonderen sogar unendlich viele), an denen jene drei Punkte in A_2, A_1, A_0 gespiegelt werden, so dass also wird:

$$A_0 A_1 \{s\} A_2 A_1 \quad \text{und} \quad A_0 A_1 \{S\} A_2 A_1 .$$

Daraus folgt aber:

$$A_2 A_1 \{s\} A_0 A_1 \{\mathfrak{A}\} A_1 A_2 \quad \text{und} \quad A_2 A_1 \{S\} A_0 A_1 \{\mathfrak{A}\} A_1 A_2$$

oder:

$$A_2 A_1 \{s\mathfrak{A}\} A_1 A_2 \quad \text{und} \quad A_2 A_1 \{S\mathfrak{A}\} A_1 A_2 .$$

Da die Folge zweier Bewegungen wie auch zweier Stülpungen eine Bewegung ist, so ist sowohl $s\mathfrak{A} = t$, wie auch $S\mathfrak{A} = t'$ eine Bewegung, die zwei Punkte mit einander vertauscht, also (15.) eine Umwendung (Spiegelung an einer Geraden) und es wird:

$$\mathfrak{A} = st \quad \text{und} \quad \mathfrak{A} = St' \qquad \text{w. z. b. w,}$$ [1]

XI. Ueber Verwandtschaften, die sich als Folgen zweier Spiegelungen darstellen lassen.

95. Es sei eine Verwandtschaft $\mathfrak{A}$ als Folge zweier Spiegelungen gegeben:

$$\mathfrak{A} = rs ,$$

dann können wir sagen, $\mathfrak{A}$ sei in die Spiegelungen r und s *zerlegt*.

Die eine der Spiegelungen (r) nimmt die erste, die andere (s) die zweite Stelle ein. Suchen wir aber diejenige Verwandtschaft s', welche durch r in s übergeführt wird, und ebenso die

---

1) Diesen Beweis, der weit einfacher ist, als die in Nr. 17. und 19. gegebenen Beweise desselben Satzes, habe ich auf der Naturforscherversammlung in Bremen (1890) mitgetheilt. Er stimmt mit dem Beweise des vorigen Satzes Schritt für Schritt überein, und ist bei Zerlegung einer Verwandtschaft in zwei Spiegelungen typisch; so kommt sein Grundgedanke auch beim Beweise des Satzes zur Geltung, dass jede (ebene oder räumliche) Reciprocität sich in zwei Spiegelungon zerlegen lässt.

Verwandtschaft r', in welche r durch s übergeführt wird, so erhalten wir die Gleichungen (36.):

$$s'r = rs \quad \text{und} \quad rs = sr' ,$$

wo r' und s' eindeutig als Spiegelungen (46.) bestimmt sind aus:

$$s' = rsr , \quad srs = r' ;$$

die ersten Gleichungen ergeben den

Satz. *Steht bei einer Zerlegung einer Verwandtschaft in zwei Spiegelungen eine Spiegelung an erster (oder zweiter) Stelle der Zerlegung, so giebt es eine andere Zerlegung der Verwandtschaft, bei der die Spiegelung an der zweiten (ersten) Stelle steht.*

96. **Erklärung.** *Eine Verwandtschaft heisst zweispiegelig, wenn sie sich in zwei Spiegelungen zerlegen lässt, ohne selbst eine Spiegelung zu sein.*

Die *Spiegelung* heisst dem entsprechend eine *einspiegelige*, die *Identität* eine *nullspiegelige Verwandtschaft.*

$\mathfrak{A}$ ist also zweispiegelig, wenn

$$\mathfrak{A} = st , \quad \mathfrak{A}^2 \neq 1 .$$

Satz. *Ist $\mathfrak{A}$ zweispiegelig, so kann bei der Zerlegung $rs = sr'$ die Spiegelung r' nicht mit r identisch sein.*

Denn wäre $r = r'$, so wäre

$$\mathfrak{A} = rs = sr ,$$

$$(rs)^2 = 1 = \mathfrak{A}^2 ,$$

was gegen die Voraussetzung ist.

97. Ist $\mathfrak{A}$ eine von der Identität verschiedene Verwandtschaft, die sich in zwei Spiegelungen r und s zerlegen lässt, d. h.:

$$\mathfrak{A} = rs , \quad r \neq s ,$$

so folgt daraus:

$$\mathfrak{A}s = r , \quad r\mathfrak{A} = s ,$$

und hieraus:

$$(\mathfrak{A}s)^2 = 1 , \quad \mathfrak{A}s \neq 1 , \quad (r\mathfrak{A})^2 = 1 , \quad r\mathfrak{A} \neq 1 ,$$

d. h. (wegen $r^{-1} = r$, $s^{-1} = s$ nach 44.):

Satz. *Lässt sich eine Verwandtschaft in zwei Spiegelungen zerlegen, so ist sie zu jeder dieser Spiegelungen harmonisch.*

Beispiele. So ist zu einer *Schiebung* die Spiegelung an jedem Punkt des Raumes (nach 49 a, Umkehrung) und die Umwendung um jede zur Schiebrichtung senkrechte Gerade (nach 8, Umkehrung)



harmonisch; ferner zu einer *Schraubung* die Umwendung um jede die Schraubenachse senkrecht treffende Gerade (10, Umkehrung), endlich zu eines *Projektivität* jede Involution, die zu der zur Projektivität gehörigen Involution harmonisch ist (89, g.).

98. Dieser Satz lässt sich umkehren. Denn nehmen wir an, $\mathfrak{A}$ sei eine beliebige Verwandtschaft, zu der irgend welche harmonische Spiegelungen $t \cdots$ vorhanden seien. Dann bekommen wir

$$(\mathfrak{A}t)^2 = 1 \quad \mathfrak{A} \mp t ,$$

also:

$$\mathfrak{A}t = u ,$$

wo u eine Spiegelung ist, und

$$\mathfrak{A} = ut .$$ D. h.:

Satz. *Jede Verwandtschaft, zu der es harmonische Spiegelungen giebt, lässt sich in zwei Spiegelungen zerlegen, von denen die eine (die erste oder die zweite) unter diesen harmonischen Spiegelungen beliebig herausgegriffen werden kann, wodurch die andere eindeutig bestimmt ist.*

Aus dem Satz in 96. folgt, dass jede zweispiegelige Verwandtschaft sich auf mehr als eine Art in zwei Spiegelungen zerlegen lässt.

Zusatz. *Ist von einer Verwandtschaft die Rede, die zu einer Spiegelung harmonisch sei, so ist dadurch schon von selbst ausgedrückt, dass die Verwandtschaft sich in zwei Spiegelungen zerlegen lasse.*

99. Die Gleichung

$$\{\mathfrak{A}t\}^2 = 1$$

kann auch geschrieben werden

$$\mathfrak{A}t = t\mathfrak{A}^{-1} ,$$

d. h. (nach 36.):

Satz. *Jede zu einer Verwandtschaft harmonische Spiegelung führt die Verwandtschaft in ihre Umkehrung über.*

Da aber auch rückwärts die erste Gleichung aus der zweiten folgt, so gilt die

Umkehrung. *Jede Spiegelung, die eine mit ihr nicht identische Verwandtschaft in ihre Umkehrung überführt, ist zur Verwandtschaft harmonisch.*

100. Durch wiederholte Anwendung des Satzes 95. erhält man:

$$\mathfrak{A} = rs = sr' = r'r'' = r''r''' = \cdots = r^{(n-1)}r^{(n)} ,$$

$$\mathfrak{A}^{-1} = sr = rs' = s's'' = s''s''' = \cdots = s^{(n-1)}s^{(n)} ,$$

wobei im Allgemeinen die Reihe $r, r' \cdot\cdot r^{(n)}$, $s, s' \cdot\cdot s^{(n)}$ lauter verschiedene (durch r und s völlig bestimmte) Spiegelungen enthalten wird, aber nicht enthalten muss. Bilden wir nun (unter Anwendung der Sätze 34. und 41.):

$$\mathfrak{A}^2 = (sr')\,(r'r'') = sr'' ,$$

$$\mathfrak{A}^3 = (sr')\,(r'r'')\,(r''r''') = sr''' ,$$

$$\vdots$$

$$\mathfrak{A}^n = (sr') \cdot\cdot (r^{(n-1)}r^{(n)}) = sr^{(n)} ,$$

$$\mathfrak{A}^{-2} = (rs')\,(s's'') = rs'' ,$$

$$\mathfrak{A}^{-3} = (rs')\,(s's'')\,(s''s''') = rs''' ,$$

$$\vdots$$

$$\mathfrak{A}^{-n} = (rs') \cdot\cdot (s^{(n-1)}s^{(n)}) = rs^{(n)} ,$$

so folgt daraus (nach 97.), dass s harmonisch zu $\mathfrak{A}^2, \mathfrak{A}^3, \cdot\cdot \mathfrak{A}^n$, und r harmonisch zu $\mathfrak{A}^{-2}, \mathfrak{A}^{-3}, \cdot\cdot \mathfrak{A}^{-n}$ wird. Da aber r und s beliebige zu $\mathfrak{A}$ harmonische Spiegelungen sind, so erhält man den

Satz. *Ist eine Spiegelung zu einer Verwandtschaft harmonisch, so ist sie es auch zu der n-maligen Wiederholung, sowohl der Verwandtschaft, wie auch ihrer Umkehrung.*

101. Der Satz in 98. lässt noch eine Umformung zu, die eine der wichtigsten Gleichungen der Theorie ergiebt. Aus:

$$\mathfrak{A} = rs = ut$$

folgt:

$$rst = u$$

oder:

$$\{rst\}^2 = 1 , \quad rst \neq 1 ;$$

und umgekehrt folgen aus diesen Gleichungen wieder die vorigen.

Satz. *Jede Spiegelung t, die zu einer in zwei Spiegelungen r und s zerlegbaren Verwandtschaft rs harmonisch ist, genügt der Gleichung*

$$\{\boldsymbol{rst}\}^2 = \mathbf{1} .$$

Umkehrung. *Gilt zwischen drei Spiegelungen r, s, t diese Gleichung, ohne dass $rst = 1$ ist, d. h. ohne dass die drei Spiege-*

lungen unter einander vertauschbar sind, so sind alle drei zu einer einzigen Verwandtschaft harmonisch.

Sie sind dann nicht nur zur Verwandtschaft rs, sondern ebensogut zu st und zu tu harmonisch. Denn durch cyklische Vertauschung (35. Zusatz III) erhält man:

$$1 = rstrst = strstr = trstrs ,$$

oder:

$$\{rst\}^2 = 1 , \quad \{str\}^2 = 1 , \quad \{trs\}^2 = 1 ,$$

und ebenso gelten diese Formeln von hinten nach vorn geschrieben.

Anmerkung. *Die Bedingung, dass die drei Spiegelungen r, s, t zu einer einzigen Verwandtschaft harmonisch sind, genügt nicht, um daraus die Gleichung $\{rst\}^2 = 1$ abzuleiten.*

Um dies zu zeigen, und um die Bedeutung der Gleichung in's Licht zu setzen, fügen wir hier ein Beispiel ein.

102. **Beispiel.** Wir wollen untersuchen, welche geometrischen Beziehungen zwischen drei Geraden r, s, t bestehen, wenn zwischen den Umwendungen $\{r\}$, $\{s\}$, $\{t\}$ um die drei Geraden die Bedingungen bestehen:

$$\{rst\}^2 = 1 , \qquad \{rst\} \neq 1 .$$

a) Sind alle drei Geraden r, s, t unter einander parallel, so ist die Bewegung $\{rs\}$ eine Schiebung, deren Richtung mit derjenigen des Abstandes der beiden Geraden r und s übereinstimmt (8.). Harmonisch dazu sind die Umwendungen um solche Geraden, die zur Schiebungsrichtung senkrecht sind, eine Bedingung, die t unter der Annahme a) stets erfüllt.

b) Nehmen wir an, dass nicht alle drei Geraden parallel seien, also z. B. r nicht parallel zu s (während t einer dieser parallel sein kann), so gibt es eine einzige Gerade, welche die beiden Geraden r und s senkrecht trifft, nämlich die *Axe* der Bewegung $\{rs\}$; eine Bewegung mit Axe ist eine *Schraubung* mit den Sonderfällen der Halbumschraubung (vergleiche 10. am Schluss), der Drehung (9.) und der Umwendung (9. Zusatz II.) im Gegensatz zur Schiebung.

Soll nun die Umwendung um t, wie es die obigen Bedingungen fordern, harmonisch zur Bewegung $\{rs\}$ sein, so muss t die Axe der Bewegung senkrecht treffen (vgl. 9. Umkehrung und 10. Umkehrung), d. h. die Geraden r, s und t treffen eine und dieselbe Gerade senkrecht.

Ebenso folgen umgekehrt aus dieser Lage der drei nicht zu einer einzigen Geraden parallelen Geraden die obigen Bedingungen.

Satz. *Genügen die Umwendungen um drei Gerade r, s, t den Bedingungen $\{rst\}^2 = 1$, $\{rst\} \neq 1$, so sind*

a) *die drei Geraden untereinander parallel, oder*

b) *die drei Geraden werden von einer einzigen weiteren Geraden senkrecht getroffen.*

Umgekehrt: *Haben die drei Geraden eine dieser Lagen, so genügen die Umwendungen um sie jenen Bedingungen.*

Nimmt man nun drei zu einer *Schiebung* harmonische Umwendungen an, deren Axen *r, s, t* also zur Schiebungsrichtung senkrecht sind, doch so, dass sie weder der Bedingung a) noch der Bedingung b) genügen (also z. B. so, dass ihre in der Richtung der Schiebung erfolgende Projection auf eine dazu senkrechte Ebene ein Dreieck bilden) so hat man drei zu einer Bewegung harmonische Spiegelungen, für die (nach dem Satz) die Gleichungen nicht gelten.

103. Sind *zwei Zerlegungen* derselben Verwandtschaft gegeben:

$$\mathfrak{A} = rs = ut\ ,$$

so folgt daraus:

$$rstu = 1 = stur$$

(nach 35. Zusatz III.); daraus:

$$ru = st = \mathfrak{B}\ .$$

Nun wird:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = (rs)\,(st) = rt$$

$$\mathfrak{B}\mathfrak{A} = (ru)\,(ut) = rt\ ,$$

daher:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}\ .$$

Satz. *Sind zwei Zerlegungen einer Verwandtschaft in zwei Spiegelungen gegeben, $rs = ut$, so folgen daraus auch zwei Zerlegungen einer neuen, mit der gegebenen vertauschbaren Verwandtschaft $ru = st$.*

Beispiel. Die einfachste Anwendung findet dieser Satz bei der Spiegelung an Punkten, wo er nur ein andrer Ausdruck eines *Parallelogrammsatzes* ist, nämlich des Satzes, dass wenn zwei Strecken einander gleich sind, es auch diejenigen Strecken sind, die vom Anfangs- und vom Endpunkte der einen nach dem Anfangs- und nach dem Endpunkte der anderen gehen; oder in Zeichen:

Ist $\overline{RS} = \overline{UT}$, so ist auch $\overline{RU} = \overline{ST}$.

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt nämlich die Gleichung zwischen den Spiegelungen an jenen Punkten:

$$\{RS\} = \{UT\} = \mathfrak{A}$$

(nach 49, Zusatz). Daraus aber folgt (nach 103.):

$$\{RU\} = \{ST\} = \mathfrak{B} ,$$

was die zweite Streckengleichung zur Folge hat.

Die Verwandtschaften $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind vertauschbare Bewegungen nämlich Schiebungen um die Strecken:

$$2RS \quad \text{bezw.} \quad 2RU \qquad \text{(nach 49, Satz.)}.$$

104. Der vorige Satz lässt noch eine Umformung und zugleich eine Erweiterung zu. Er handelte von zwei vertauschbaren Bewegungen $\mathfrak{A} = rs$, $\mathfrak{B} = st$, zu denen es eine gemeinsame harmonische Spiegelung s giebt.

Wir fragen allgemein, wann sind zwei solche Verwandtschaften vertauschbar, wann ist also:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}$$

d. h.:

$$(rs)(st) = (st)(rs) .$$

Aus der letzten Gleichung folgt

$$rt = strs ,$$

oder, indem man beiderseits vorn r, hinten t zufügt:

$$1 = rstrst = \{rst\}^2.$$

Gilt umgekehrt diese Gleichung, so folgert man daraus die Vertauschbarkeit, indem man die vorige Schlussreihe von unten nach oben liest.

Wir haben also den

Satz. *Zwei zu einer einzigen Spiegelung s harmonische Verwandtschaften $\mathfrak{A} = rs$, $\mathfrak{B} = st$ sind dann und nur dann vertauschbar, wenn $\{rst\}^2 = 1$ ist.*

Die Erweiterung gegenüber Nr. 103 liegt darin, dass dort $rst = u$, also $rst \neq 1$ gesetzt wurde, während der Satz auch für $rst = 1$ gilt, was wir schon aus 48. wissen, da dann

$$\mathfrak{A} = rs = t , \quad \mathfrak{B} = st = r ,$$

d. h. $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei vertauschbare Spiegelungen werden.

Um die Brauchbarkeit dieses Satzes zu zeigen, erledigen wir mit seiner Hilfe eine in der Theorie der Bewegungen wichtige Aufgabe.

Beispiel.

105. **Aufgabe.** *Es sind die Fälle aufzuführen, unter denen zwei Bewegungen vertauschbar sind.*

Da je zwei Bewegungen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ eine gemeinsame harmonische Umwendung haben (vgl. 11.), so lassen sie sich stets auf die Form $\mathfrak{A} = \{rs\}$, $\mathfrak{B} = \{st\}$ bringen. Der vorige Satz geht dabei über in den

Satz. *Zwei beliebige Bewegungen* $\mathfrak{A} = \{rs\}$, $\mathfrak{B} = \{st\}$ *sind dann und nur dann vertauschbar, wenn die Gleichung gilt*

$$\{rst\}^2 = 1 \ .$$

Wir haben also nur die Fälle zu unterscheiden, unter denen diese Gleichung gilt.

A) Ist schon $\{rst\} = 1$, so ist

$$\mathfrak{A} = \{rs\} = \{t\} \ , \quad \mathfrak{B} = \{st\} = \{r\} \ , \quad \mathfrak{A}\mathfrak{B} = \{tr\} = \{s\} \ ,$$

d. h. $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind zwei vertauschbare *Umwendungen, deren Umwendaxen, t und s, sich senkrecht treffen* (90, b').

Sind umgekehrt zwei Umwendungen gegeben, deren Axen sich senkrecht treffen, so sind sie vertauschbare Bewegungen (9. Zus. II. u. 47.)

B) Es sei $\{rst\} \neq 1$. Dann ist die Gleichung $\{rst\}^2 = 1$ von selbst erfüllt, wenn zwei der drei Geraden einander gleich sind, z. B. $s = t$. Denn dann ist $\{rss\}^2 = \{r\}^2 = 1$. Dabei ist $\mathfrak{A} = rs$ eine *beliebige Bewegung*, $\mathfrak{B} = st = s^2 = 1$ die *Identität.*

Sind aber r, s, t *verschiedene* Geraden, so haben wir (nach 102.) die beiden Fälle zu unterscheiden:

a) r, s und t seien drei zu einander parallele Geraden. Dann sind $\mathfrak{A} = \{rs\}$ und $\mathfrak{B} = \{st\}$ *Schiebungen.*

Sind umgekehrt zwei beliebige Schiebungen gegeben, so ist s irgend eine von den Geraden, die auf den beiden Schiebungsrichtungen senkrecht stehen, während die aus $\mathfrak{A} = \{rs\}$ und $\mathfrak{B} = \{st\}$ zu bestimmenden Geraden r und t zu s parallel sind (nach 9, Zusatz.) Daher gilt die Gleichung und die beiden Schiebungen sind vertauschbar.

b) Werden die drei Geraden r, s, t von einer einzigen weiteren senkrecht geschnitten, ohne dass alle drei zu einander parallel sind, so sind noch zwei Unterfälle möglich:

α) Es seien nur zwei von den drei Geraden zu einander parallel, z. B. s und t; dann ist $\mathfrak{A} = rs$ (da r nicht parallel zu s ist) eine *Bewegung mit Axe,* und zwar ist die Axe diejenige Gerade, die r und s und nach der Annahme auch t senkrecht trifft; $\mathfrak{B} = st$ ist dann eine *Schiebung* in der Richtung dieser Axe, da diese r und s senkrecht trifft.

Sind umgekehrt irgend zwei Bewegungen gegeben, von denen die eine eine Axe besitzt, die andere eine Schiebung in der Richtung

dieser Axe ist, so ist die Umwendung um irgend eine die Axe senkrecht treffende Gerade s zu beiden Bewegungen harmonisch, und es trifft dann nicht nur r, sondern auch t die Axe senkrecht, daher sind die Bewegungen vertauschbar.

β) Sind keine zwei der Geraden r, s, t parallel, so ist $\mathfrak{A} = rs$ und $\mathfrak{B} = st$ je eine Bewegung mit Axe, da aber ein und dieselbe Gerade r und s sowie s und t senkrecht trifft, so ist die Axe beider identisch.

Sind umgekehrt zwei Bewegungen mit gemeinsamer Axe gegeben, so treffen die Geraden r, s und t diese Axe senkrecht, woraus die Gleichung und somit die Vertauschbarkeit folgt.

Die »Aufgabe« findet daher folgende

Lösung. *Zwei Bewegungen sind in den folgenden Fällen und nur in diesen vertauschbar:*

1) *Wenn die eine von ihnen die Identität ist* (vgl. B.);
2) *wenn beide Umwendungen sind, deren Axen sich senkrecht treffen* (A.);
3) *wenn beide Schiebungen sind* (B, a);
4) *wenn die eine eine Bewegung mit Axe, die andere eine Schiebung in der Richtung der Axe ist* (B, b, α);
5) *wenn beide Bewegungen zusammenfallende Axen haben* (B, b, β).

Dieses Ergebniss ist die Folge der Zergliederung einer einzigen Gleichung. Die Umständlichkeit der bisherigen Methoden gegenüber solchen Aufgaben mag die Schuld tragen, dass (soweit mir bekannt) die vollständige Lösung dieser Aufgabe in den bisherigen Darstellungen fehlt[1].

---

1) In der Literatur ist in betreff der Vertauschbarkeit der Bewegungen dadurch einige Verwirrung eingetreten, dass nicht immer angegeben ist, ob sich die Vertauchbarkeit auf Bewegungen bezieht, welche um Schraubenaxen ausgeführt werden, die im Raume fest liegen, oder die durch die Bewegung mitgenommen werden. So spricht Chelini (»Dei moti geometrici e loro leggi nello spostamento di una figura di forma invariabile«, Abh. der Ak. von Bologna II Serie I, 1862, vgl. Nr. 11, 2°) den Satz aus, dass eine Drehung mit einer Schiebung vertauschbar sei, deren Richtung zur Drehaxe senkrecht ist. Dabei setzt er stillschweigend voraus, (wie sich aus der Beweisführung ergiebt), dass die Drehaxe durch die Bewegung mitgenommen werde. Dagegen hat z. B. Budde unter Verallgemeinerung auf beliebige *Schiebungen* diese Voraussetzung gehörig betont (»Allgemeine Mechanik der Punkte und starren Systeme« Band II, Berlin 1891, S. 538). Aber man könnte durch Hervorheben dieses immer noch speciellen Satzes meinen, dass er nicht allgemein gelte, was doch der Fall ist, und was gerade so einfach, wie der Sonderfall bewiesen wird. Sind nämlich $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei beliebige Bewegungen, so bestimmt die Gleichung $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}'$ eine Bewegung $\mathfrak{A}'$; es ist dies diejenige in welche $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{B}$ übergeführt wird (vgl. diese Reihe Nr. 36); $\mathfrak{A}'$ hat nun denselben Schraubenwinkel und dieselbe Schraubenhöhe, wie $\mathfrak{A}$, und diejenige Gerade als

106. Schon die bisher gegebenen Anwendungen zeigen, dass die Gleichung bei aller Einfachheit eine grosse Wichtigkeit hat.

Es sei mir gestattet, sie noch auf die Theorie der Projectivitäten anzuwenden, da sich hierbei aus ihr eine neue und fundamentale Eigenschaft der projectiven Beziehungen ergiebt.

Einschub II.

a) **Satz.** *Sind* I_1, I_2, I_3 *drei Involutionen eines Büschels, so ist* [1]

$$\{I_1 I_2 I_3\}^2 = 1 \ , \quad I_1 I_2 I_3 \neq 1 \ .$$

Ist nämlich J die zu allen dreien harmonische Involution [2] (vgl. 89, c), so ist $\{I_2 I_3\}$ eine Projectivität, deren zugehörige (Doppelpunkts-)Involution J ist. Es kann daher $I_2 I_3$ als Folge zweier Involutionen dargestellt werden, von denen man (89. f) als die eine irgend eine zu J harmonische Involution, z. B. I_1 wählen kann, wodurch dann die zweite — sie heisse I_1' — völlig bestimmt ist; dann ist:

$$I_2 I_3 = I_1 I_1' \ ,$$

Schraubenaxe, in welche die Schraubenaxe von $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{B}$ übergeführt wird. Da die Schraubenaxe von $\mathfrak{A}$ bei der Bewegung $\mathfrak{A}$ in sich verschoben wird, so sagt die Gleichung $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}'$ folgendes aus:

Satz. *Eine beliebige Bewegung* $\mathfrak{A}$ *ist mit einer beliebigen andern* $\mathfrak{B}$ *vertauschbar, falls die Schraubenaxe von* $\mathfrak{A}$ *in dem bewegten räumlichen System festgelegt ist, die von* $\mathfrak{B}$ *aber im festen System.*

1) Dieser Satz kann, auf den Kegelschnitt übertragen, als ein Ausdruck des PASCAL'schen Satzes angesehen werden. Denn dann müssen die drei Centra C_1, C_2, C_3 der Involutionen I_1, I_2, I_3 auf einer Geraden liegen, nämlich auf der Involutionsaxe der zu allen dreien harmonischen Involution J. Wird nun ein Punkt A_1 des Kegelschnitts durch die Involution I_1 in A_1, dieser durch I_2 in A_2 übergeführt, u. s. f., so erhält man die Reihe

$$A_0 \{I_1\} A_1 \{I_2\} A_2 \{I_3\} A_3 \{I_1\} A_4 \{I_2\} A_5 \{I_3\} A_6 \ ,$$

wo in Folge der Gleichung $\{I_1 I_2 I_3\}^2 = 1$ der Punkt A_6 mit A_0 zusammenfällt. Da zwei Punkte, die einander in einer Involution entsprechen, mit dem Involutionscentrum in einer Geraden liegen, so treffen sich die Geraden $A_0 A_1$ und $A_3 A_4$ in C_1, $A_1 A_2$ und $A_4 A_5$ in C_2, $A_2 A_3$ und $A_5 A_0$ in C_3; dies ist aber gerade die PASCAL'sche Configuration, da C_1, C_2, C_3 in einer Geraden liegen.

2) Dieser Satz gilt auch für den Sonderfall des Büschels, in dem die drei Involutionen einen gemeinsamen Doppelpunkt besitzen; wir brauchen ihn hier um so weniger zu berücksichtigen, als wir ohnehin in einem folgenden Abschnitt auf ihn zurückkommen.

Uebrigens wird man bei einer systematischen Behandlung der Projectivitäten gut thun, um nicht den Sonderfall immer getrennt behandeln



oder: $$I_1 I_2 I_3 = I_1'$$
oder: $$(I_1 I_2 I_3)^2 = 1\,, \quad I_1 I_2 I_3 \neq 1\,.$$

b) **Satz.** *Sind A und A', B und B', C und C' drei Paare einer Involution, so ist*[1])

$$\left\{\begin{matrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{matrix}\right\}^2 = 1.$$

Denn sind die drei Punktepaare in Involution, so sind sie die Doppelpunkte dreier zu einem Büschel gehörigen Involutionen, I_1, I_2, I_3, daher ist (a)

$$\{I_1 I_2 I_3\}^2 = 1\,.$$

Da aber die Spiegelung an einem Punktepaar A, A' gleichbedeutend ist mit der Construction zugeordneter Punkte in der Involution, die A, A' zu Doppelpunkten hat, so ist

$$I_1 = \left\{\begin{matrix} A \\ A' \end{matrix}\right\}, \quad I_2 = \left\{\begin{matrix} B \\ B' \end{matrix}\right\}, \quad I_3 = \left\{\begin{matrix} C \\ C' \end{matrix}\right\},$$

wodurch die gefundene Gleichung in die gesuchte übergeht.

c) **Satz.** *Sind von einer Involution zwei Punktepaare gegeben, so kann man zu jedem beliebig weiter gegebenen Punkt den in der Involution zugeordneten Punkt durch eine* e n d l i c h e *Anzahl von Constructionen harmonischer Punkte aus den gegebenen Punkten finden.*

In der Involution $ABC \,\overline{\wedge}\, A'B'C'$ seien die Punkte A, B, C, A', B' gegeben, C' gesucht.

Nach b) ist

$$\text{(I.)} \qquad \left\{\begin{matrix} A & B & C & A & B \\ A' & B' & C' & A' & B' \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} C \\ C' \end{matrix}\right\}.$$

Es sei:

$$\text{(II.)} \qquad C \left\{\begin{matrix} A \\ A' \end{matrix}\right\} C_1 \left\{\begin{matrix} B \\ B' \end{matrix}\right\} C_{12}$$

und

$$\text{(III.)} \qquad C \left\{\begin{matrix} B \\ B' \end{matrix}\right\} C_2 \left\{\begin{matrix} A \\ A' \end{matrix}\right\} C_{21}\,;$$

beachtet man, dass wie auch der (nicht in C fallende) Punkt C' liegen mag, C durch Spiegelung am Punktepaar C, C' stets in sich übergeht, so erhält man wegen (III.) und (II.):

$$C_{21} \left\{\begin{matrix} A \\ A' \end{matrix}\right\} C_2 \left\{\begin{matrix} B \\ B' \end{matrix}\right\} C \left\{\begin{matrix} C \\ C' \end{matrix}\right\} C \left\{\begin{matrix} A \\ A' \end{matrix}\right\} C_1 \left\{\begin{matrix} B \\ B' \end{matrix}\right\} C_{12}\,,$$

oder wegen (I.):

---

zu müssen, den Büschel von Involutionen geradezu durch die Formeln

$$\{I_1 I_2 I_3\}^2 = 1 \qquad \{I_1 I_2 I_3\} \neq 1$$

zu definiren.

$$C_{21}\left\{\begin{matrix}C\\C'\end{matrix}\right\}C_{12},$$

d. h. C_{21} und C_{12} liegen zu C und C' harmonisch.

Man erhält also die folgende

Construction. *Um in einer durch die Paare A, A' und B, B' gegebenen Involution zu einem beliebigen Punkte C den zugeordneten Punkt zu finden, suche man:*

von C den 4. harmon. C_1 zu AA'; von C_1 den 4. harmon. C_{12} zu BB',
" C " " " C_2 " BB'; " C_2 " " " C_{21} " AA',
" C " " " C' " $C_{12}C_{21}$,

so ist C' der gesuchte Punkt.

d) **Aufgabe.** *In einer durch ein Paar entsprechender Punkte A, A_1 und durch die zugehörige (Doppelpunkts-)Involution J gegebenen Projectivität $\mathfrak{P}$ ist zu einem beliebigen weiter gegebenen Punkt B der entsprechende Punkt zu suchen.*

Lösung. Man suche

1) in der irgendwie durch zwei Punktepaare gegebenen Involution J die zu den Punkten A_1, B zugeordneten Punkte A_1', B';

2) in der durch das Punktepaar A_1, B und das Punktepaar A_1', B' bestimmten Involution I den zu A zugeordneten Punkt B_1, so ist dies der gesuchte Punkt.

Beweis. Die Formel

$$A_1 B\,\{J\}\,A_1' B'$$

sagt aus, dass J das Punktepaar $A_1 B$ in das Punktepaar A_1', B' überführt, daher ist die durch diese Punktepaare vermöge

$$A_1 A_1'\,\{I\}\,BB'$$

bestimmte Involution I zu J harmonisch und (89, b.) führt daher jedes Paar entsprechender Punkte der Projectivität $\mathfrak{P}$ in ein solches Paar von $\mathfrak{P}^{-1}$ über (89, h.). Es ist also wegen

$$AA_1\,\{I\}\,B_1 B$$

B_1, B ein Paar entsprechender Punkte von $\mathfrak{P}^{-1}$ also B, B_1 ein solches Paar von $\mathfrak{P}$, w. z. b. w.

e) **Aufgabe.** *In einer durch drei Paare entsprechender Punkte A, B, C und A_1, B_1, C_1 gegebenen Projectivität ist die zugehörige (Doppelpunkts-)Involution J zu suchen.*

Statt zu der gegebenen Projectivität kann man die Involution J auch zu einer beliebigen anderen Projectivität ableiten, welche die

Folge von zwei zu J harmonischen Involutionen ist (89, f.). Solcher Involutionen hat man aber drei (89, h.):

$$BC\{I_1\}C_1B_1\ ,\quad CA\{I_2\}A_1C_1\ ,\quad AB\{I_3\}B_1A_1\ .$$ [1])

Man erhält nun zu einem beliebigen Punkte D den zugeordneten Punkt D' in J als 4. harmonischen von D zu den beiden Punkten, die dem Punkte D z. B. in $\mathfrak{P}_{12} = I_1 I_2$ rückwärts und vorwärts entsprechen (89, e.).

Ist also:

$$D\{I_1\}D_1\{I_2\}D_{12} \qquad \text{und:}$$
$$D\{I_2\}D_2\{I_1\}D_{21}\ , \qquad \text{und demnach:}$$
$$D_{21}D\{I_1I_2\}DD_{12}\ ,$$

so ist der 4. harmonische D' von D zum Paare D_{21}, D_{12} der gesuchte Punkt.

f) **Satz.** *Sind von einer Projectivität drei Paare entsprechender Punkte gegeben, so kann man zu jedem beliebigen weiter gegebenen Punkte den entsprechenden durch eine e n d l i c h e Anzahl von Constructionen harmonischer Punkte aus den gegebenen Punkten finden.*

Man suche

1) zu zwei beliebigen Punkten die in der zugehörigen Involution J zugeordneten Punkte (nach e) und

2) in der jetzt durch ein Paar entsprechender Punkte A, A' und die zugeordnete Involution J bestimmten Projectivität den entsprechenden zum gegebenen Punkt, (nach d).

Zur Lösung von e) und f) ist aber nur die eine Aufgabe — in einer durch ein Punktepaar gegebenen Involution den zu einem Punkte zugeordneten Punkt zu suchen — benutzt. Und da diese sich (nach c) auf die Constructionen harmonischer Punkte zurückführen lässt, so gilt dies in gleicher Weise für die allgemeine Aufgabe.

Dieser Satz ist für die projektive Geometrie der Geraden deshalb von grosser Bedeutung, weil durch ihn gezeigt wird, dass *eine einzige Construktion*, die harmonischer Punkte, ausreicht, um alle linearen Constructionen auf der Geraden ausführen zu können,

---

1) Auch hier haben wir es bei der Uebertragung auf den Kegelschnitt mit einem allgemein bekannten, von Steiner angegebenen, Verfahren zu thun. Denn die drei Schnittpunkte der Geraden BC_1 und CB_1, CA_1 und AC_1, AB_1 und BA_1 liegen dann in einer Geraden (der Doppelpunktsgeraden der Projektivität auf dem Kegelschnitt). Diese drei Punkte sind aber die Involutionscentra von I_1, I_2 und I_3, die Gerade auf der sie liegen, die Involutionsaxe der zu ihnen harmonischen Involution J, für die oben eine Construktion angegeben ist, die auch dann noch gilt, wenn die Punktreihe nicht auf dem Kegelschnitt, sondern in der Geraden liegt.

während man sich bisher auf drei Construktionen (von denen allerdings jede später genannte jede frühere in sich schliesst) stützen musste[1], nämlich auf die Construktion harmonischer Punkte zu zwei gegebenen, und auf die Constructionen eines beliebigen Paares entsprechender Punkte in einer durch zwei Punktepaare gegebenen Involution und in einer durch drei Punktepaare gegebenen Projektivität[2].

---

1) Man vgl. meine Hab. Schr. Nr. 3.

2) Ausführlicher begründet habe ich die Bedeutung dieser Sätze, für den Aufbau der projektiven Geometrie der Geraden in meinem auf der Naturforscherversammlung zu Halle gehaltenen Vortrag: »Ueber Grundlagen und Aufbau der Geometrie«.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

SITZUNG VOM 31. JULI 1893.

Hermann Wiener, *Ueber Gruppen vertauschbarer zweispiegeliger Verwandtschaften.*[1]) Vorgelegt von Herrn Engel. Mit 17 Figuren.

XII. Der Uebergang von Streckengleichungen zu Gleichungen zwischen Punktspiegelungen.

107. Die Aufgabe, zwei gegebene *Schraubungen* zu einer einzigen Schraubung zusammenzusetzen, habe ich in der Reihe von Abhandlungen, an die sich die vorliegende anschliesst, an die Spitze gestellt und von vornherein darauf hingewiesen, dass sich ihre Lösung in ganz entsprechender Weise gestaltet, wie bei der so einfachen Aufgabe, zwei gegebene *Strecken* zu einer einzigen Strecke zusammenzusetzen. Was aber damals vielleicht als eine nur äusserliche Analogie erschien, wird jetzt auf seinen inneren Zusammenhang zurückgeführt, wenn wir die im X. Abschnitte entwickelten allgemeinen Methoden der Uebertragung von Sätzen zu Rate ziehen. Die folgende Untersuchung wird zugleich geeignet sein, Beispiele dafür zu geben, was wir damals »*formale Uebertragungen*« genannt haben.

Strecken und Schraubungen sind zu verschiedenartige Gebilde, als dass ohne weiteres eine Verbindung zwischen beiden herzustellen wäre; um sie gleichartig zu machen, bedarf es noch einer Zurichtung. Zu diesem Zwecke genügt eine naheliegende und auch sonst vielfach verwendete Bemerkung: Soll zu einer gegebenen Strecke durch jeden Punkt des Raumes als

---

1) Diese Arbeit bildet den Abschluss der Reihe von Arbeiten, die in diesen Berichten veröffentlicht sind:
1890, S. 13—23, S. 71—87, S. 245—267,
1891, S. 424—447, S. 644—673.

Anfangspunkt eine gleiche Strecke gelegt werden, so geht deren Endpunkt aus dem Anfangspunkte durch eine *Schiebung* des Raumes hervor, also durch eine Operation, die der Schraubung eines räumlichen Systems durchaus gleichartig ist. Und wie das Gleichmachen von Strecken auf die Schiebung, so führt das Aneinanderfügen (Addiren) zweier Strecken auf die Bildung der Folge zweier Schiebungen. Der Uebergang von Streckengleichungen zu Gleichungen zwischen Folgen von Spiegelungen ist rasch gemacht, sowie wir die beiden eine Strecke begrenzenden Punkte als *Spiegelelemente* einführen; dies liefert sofort die Uebertragung

a) der Streckengleichheit,
b) der Streckenaddition.

a) Wir haben früher (Nr. 49a. Weitere Beispiele) bewiesen, *dass aus einer Streckengleichung:*

$$\overline{QR} = \overline{ST}$$

stets die Gleichung für Punktspiegelungen folgt:

$$QR = ST\,,$$

ein Satz, der sich ohne weiteres umkehren lässt.

b) Um zwei Strecken $\overline{PQ}$ und $\overline{RS}$ zu addiren, d. h. $\overline{PQ} + \overline{RS}$ zu bilden, hat man nur an den Endpunkt einer Strecke, die mit $\overline{PQ}$ gleich ist, eine zweite Strecke, die mit $\overline{RS}$ gleich ist, mit ihrem Anfangspunkte anzusetzen, und die Strecke vom Anfangspunkte der ersten zum Endpunkte der zweiten zu ziehen, d. h. man mache

$$(\alpha) \qquad \overline{PQ} = \overline{LM}\,, \quad \overline{RS} = \overline{MN}$$

und bilde:

$$(\mathrm{I}') \qquad \overline{LM} + \overline{MN} = \overline{LN}\,.$$

Gilt daher eine Streckengleichung

$$(\mathrm{I}) \qquad \overline{PQ} + \overline{RS} = \overline{TU}\,,$$

so ist in ihr die Strecke $\overline{TU}$ der soeben konstruirten Strecke gleich, d. h.:

$$(\beta) \qquad \overline{TU} = \overline{LN}\,.$$

Bildet man hingegen aus den beiden zweispiegeligen Verwandtschaften LM und MN die Folge, so wird

$$(LM)\,(MN) = LMMN = LN$$

(wegen $M^2 = 1$); aus dieser Gleichung erhält man, da sich wegen a) aus (α) und (β)

$$PQ = LM\,,\quad RS = MN\,,\quad TU = LN$$

ergiebt, die folgende Gleichung:

$$(PQ)(RS) = TU\,.$$

Wie diese Gleichung aus der Streckengleichung (I), so geht umgekehrt aus ihr die Gleichung (I) hervor.

Ebenso folgt aus einer Gleichung, die auf jeder Seite die Summe einer beliebigen Anzahl von Strecken enthält, eine entsprechende Gleichung, in der an ihre Stelle Folgen von zweispiegeligen Verwandtschaften treten. Beachtet man noch, dass der Streckengleichung $\overline{SS} = 0$ die Spiegelgleichung $SS = 1$ der Null also die Eins entspricht, dass ferner die Umkehrung von Strecken und von Verwandtschaften in den Formeln

$$-\overline{RS} = \overline{SR} \qquad \text{und} \qquad (RS)^{-1} = SR$$

ihren Ausdruck findet, und dass endlich die Definitionen von $\nu\overline{RS}$ und von $(RS)^{\nu}$ als Summe und als Folge von gleichen Dingen einander entsprechen, so erhält man den

Uebertragungssatz. *Aus einer Streckengleichung, in der jede Strecke durch ihren Anfangs- und Endpunkt bezeichnet ist, und die nur rationale*[1]) *Zahlkoefficienten enthält, lässt sich stets eine Gleichung zwischen Folgen von Punktspiegelungen ableiten. Hierzu ist nur nöthig, dass man die Nenner in den Zahlkoefficienten wegschafft und hierauf die soeben beschriebenen Aenderungen an der Streckengleichung vornimmt.*

Umgekehrt kann man aus jeder Gleichung zwischen Folgen von Punktspiegelungen eine Streckengleichung ableiten. Es ist nämlich die Anzahl von Punktspiegelungen, die in einer solchen Gleichung auftreten, stets gerade (vgl. Nr. 49 a. Weitere Beispiele).

1) Ist $RS = \mathfrak{A}$ eine Schiebung, so steht nichts im Wege, für jede gebrochene, ja irrationale Zahl ν die Operation $\mathfrak{A}^{\nu}$ zu definiren, und dasselbe gilt für alle Operationen, deren Verknüpfungsgesetze den Gesetzen der Addition von Zahlen analog sind. (Man vergleiche die Beispiele A. und B. im XIV. Abschnitt.) In anderen Fällen (Beispiel: Drehung oder Schraubung um eine Axe, vgl. XIV, C) würde die Operation $\mathfrak{A}^{\nu}$ mehrdeutig; sicher aber wäre in jedem einzelnen Falle eine genaue Definition des Begriffes $\mathfrak{A}^{\nu}$ schon für gebrochene Zahlen ν nöthig. Deshalb sehen wir hier von dieser Verallgemeinerung ab.



Man kann es daher stets erreichen, nötigenfalls durch Hinüberschaffen einer Spiegelung auf die andere Seite, dass auf jeder Seite der Gleichung eine gerade Anzahl von Spiegelungen steht. Diese gruppire man auf beiden Seiten von vorn anfangend zu zweien, schreibe statt der Folge RS die Strecke $\overline{RS}$ und stelle zwischen je zwei Gruppen das Zeichen $+$.

Wir fügen hier einige Beispiele an, die geeignet sind, diese Uebertragung zu verdeutlichen, und die, so einfach sie sind, vermöge der dann folgenden Betrachtungen eine ausserordentlich mannigfaltige Umgestaltung zulassen.

Beispiele.

108. a) Aus der Streckengleichung

$$\overline{QR} + \overline{ST} = \overline{ST} + \overline{QR}$$

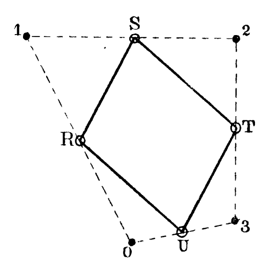
folgt die Gleichung für Punktspiegelungen

$$(QR)\,(ST) = (ST)\,(QR)\,,$$

d. h. in jeder Folge von Punktspiegelungen können zwei benachbarte Paare vertauscht werden.

b) Es ist notwendig, den Unterschied in der Bedeutung der beiden auseinander folgenden Gleichungen

$$\overline{RS} = \overline{UT} \quad \text{und} \quad RS = UT$$



anzugeben. Die erste Gleichung sagt aus, dass R, S, T, U die Ecken eines Parallelogramms sind, wie sie rings herum auf einander folgen. Daher müssen sie auch in der zweiten Gleichung die vier Eckpunkte eines Parallelogramms sein; diese sagt aber ausserdem aus, dass, wenn man irgend einen Punkt des Raumes der Folge der Punktspiegelungen R, S unterwirft, man nach demselben Punkte kommt, wie durch die Folge der Punktspiegelungen U, T.

Die Gleichung lässt sich auch schreiben

$$RST = U\,,$$

wo nun R, S, T drei beliebige Punkte des Raumes sind. Unterwirft man daher einen Punkt 0 der Spiegelfolge R, S, T, so kommt man auf einen Punkt 3, der aus 0 durch Spiegelung an einem einzigen Punkt U hervorgeht, welcher dann mit R, S, T ein Parallelogramm bildet. Daraus folgt weiter, dass, wenn man ein beliebiges räumliches Viereck 0, 1, 2, 3 annimmt und die Mitten der drei ersten Kanten als Punkte R, S, T verwendet, die Mitte U der vierten Kante 30 mit R, S, T ein Parallelogramm bildet, ein bekannter elementarer Satz.

Wiederholt man in der letzten Gleichung sowohl die links als die rechts stehende Operation, so erhält man wegen $U^2 = 1$ die Gleichung

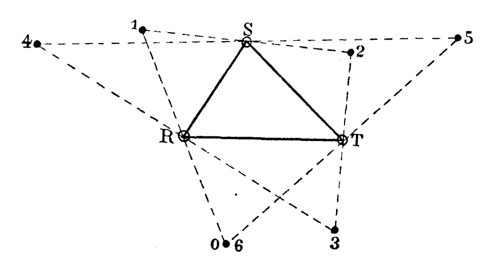
$$(R\,S\,T)^2 = 1\ ;$$

dies giebt den

Satz. *Sind R, S, T drei beliebige Punkte des Raumes, so gilt stets die Spiegelgleichung*

$$(R\,S\,T)^2 = 1\ .$$

Dieser Satz sei durch die beistehende Figur erläutert, in der sowohl R, S, T wie auch 0 beliebige Punkte des Raumes sind und der Punkt 6 mit 0 zusammenfällt.



Die Figur zeigt einige Analogie mit dem PASCAL-schen Sechseck, da auch in diesem ein geschlossener Zug von sechs Linien vorkommt, von denen sich je zwei gegenüberliegende in drei ausgezeichneten Punkten treffen. Dieser Zusammenhang beruht darauf, dass auch der PASCAL'sche Satz sich in der Form einer Spiegelgleichung

$$(R\,S\,T)^2 = 1$$

schreiben lässt. Vgl. Nr. 106a, Fussnote 1).

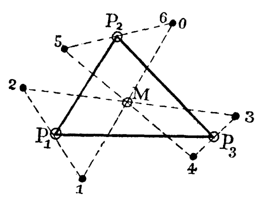
c) Sind P_1, P_2, P_3 drei beliebige Punkte des Raumes, M ihr Schwerpunkt, so gilt die Streckengleichsng

$$\overline{MP}_1 + \overline{MP}_2 + \overline{MP}_3 = 0\ .$$

Daraus folgt die Gleichung für Punktspiegelungen

$$MP_1\ MP_2\ MP_3 = 1\ .$$

Auch dieser Satz sei durch eine Figur veranschaulicht, in der 0 ein beliebiger Punkt des Raumes ist, während der Punkt 6 mit ihm zusammenfällt.



XIII. Formale Ableitung der Sätze über Gruppen vertauschbarer zweispiegeliger Verwandtschaften.

109. Es handelt sich jetzt darum, die bekannten Sätze der Streckenaddition für noch andere Gebiete der Geometrie nutzbar zu machen.

Die weitestreichenden Uebertragungen erhalten wir (nach 91 b_2), wenn wir die Sätze auf ihre ersten Grundsätze zurückführen, aus denen sie *formal* abgeleitet werden können.

Ueberall da wo diese Grundsätze ebenfalls gelten, ist dies auch für alle weiteren Sätze der Fall.

Der Umfang der Uebertragbarkeit ist also durch diese ersten Sätze völlig bestimmt.

Möbius hat für die Streckenaddition diese Zurückführung geleistet[1]), so dass wir uns nur an ihn anzuschliessen brauchen.

Er stellt die folgenden beiden aus der Definition der Strecken geometrisch abgeleiteten formalen Sätze an die Spitze:

I. Ist $\overline{QR} = \overline{ST}$ und $\overline{ST} = \overline{UV}$, so ist auch

$$\overline{QR} = \overline{UV}.$$

(In Worten heisst dies: Sind zwei Strecken einer dritten gleich, so sind sie unter einander gleich.)

II. Ist $\overline{QR} = \overline{ST}$, so ist auch

$$\overline{QS} = \overline{RT}.$$

Aus ihnen folgt dann

III. Ist $\overline{QR} = \overline{Q'R'}$ und

$\overline{RS} = \overline{R'S'}$, so ist auch

$$\overline{QS} = \overline{Q'S'}.$$

Ein Satz IV. erweitert noch den Satz III. auf mehr Glieder.

Der Satz III. (IV.) ist derjenige, der die *Streckenaddition* begründet.

Machen wir den im vorigen Abschnitt geschilderten Uebergang von den Strecken zu den Punktspiegelungen, so sehen wir, *dass alle diese Sätze sich schon aus den Regeln für das Rechnen mit Spiegelungen ergeben*, dass also die geometrischen Eigenschaften, die in diese formalen Sätze hineingelegt sind, schon in dem Zusammenhang der Gleichungen $\overline{QR} = \overline{ST}$ und $QR = ST$, und in der Formel $S^2 = 1$ ($M^2 = 1$, vgl. Nr. 107 a und b) aufgenommen sind.

In der That ist der dem I. entsprechende Spiegelsatz in der Definition der Verwandtschaften enthalten, II. ist in Nr. 103. bewiesen, III. folgt, indem man (gemäss dem Satze 35.) die beiden

---

1) Möbius: »Ueber die Zusammensetzung gerader Linien und eine daraus entspringende neue Begründungsweise des barycentrischen Calculs«. (1844.) Gesammelte Werke I. S. 601 u. ff.

Die Buchstaben, die Möbius braucht, habe ich oben abgeändert, ebenso die Bezeichnung der Strecke.

rechten Seiten und ebenso die beiden linken Seiten der gegebenen Gleichungen hintereinander schreibt:

$$(QR)\,(RS) = (Q'R')\,(R'S')\,,$$

woraus nach Weglassen der Klammern wegen $R^2 = 1$ und $R'^2 = 1$ sich ergibt:

$$QS = Q'S'\,.$$

110. Wie aber die nun folgende Entwicklung bei Möbius zeigt, setzt er stillschweigend noch die folgenden beiden Sätze voraus:

Erste Voraussetzung. Ist irgend eine Strecke $\overline{QR}$ gegeben, so kann jeder beliebige Punkt des Raumes S (bezw. T) als Anfangs-(End-)Punkt einer ihr gleichen Strecke, $\overline{QR} = \overline{ST}$ gewählt werden, und der End-(Anfangs-)Punkt T (S) ist dadurch eindeutig bestimmt.

Zweite Voraussetzung. Ist $\overline{OP}$ eine beliebige Strecke und ν eine ganze Zahl[1]), so ist ein Punkt M eindeutig so bestimmt, dass die Streckengleichung gilt $\nu\,\overline{OM} = \overline{OP}$.

Ersetzen wir in diesen beiden Voraussetzungen wieder die Strecken durch die Folgen von Spiegelungen an Punkten, die letzte Gleichung durch die Spiegelgleichung $(OM)^\nu = OP$, so ist dadurch unmittelbar die Möglichkeit gegeben, *die allgemeinste durch Spiegelgleichungen zu leistende Uebertragung anzugeben*, die den Uebergang von der Lehre der Streckenaddition zu anderen Teilen der Geometrie vermittelt.

Ja wir können uns *auf die erste Voraussetzung beschränken*, und erhalten somit die Anwendbarkeit jener Gleichungen auf Teile der Geometrie, die keineswegs der Streckenaddition völlig entsprechen, in denen aber für eine gewisse Klasse von Sätzen — die nämlich allein von der ersten Voraussetzung abhängen — die Uebereinstimmung mit den so einfachen Streckensätzen hergestellt wird.

Hierher gerade gehört auch die Zusammensetzung der Schraubungen.

---

1) Da Möbius auch irrationale Processe zulässt, ist bei ihm die Zahl ν beliebig rational oder irrational.

Die erste Voraussetzung.

111. Setzen wir statt jeder Strecke $\overline{RS}$ die Folge von Punktspiegelungen RS, so stellt uns die Gesammtheit aller Punkte des Raumes eine Schaar von Spiegelelementen dar, die Verbindungen RS eine Gesammtheit von zweispiegeligen Verwandtschaften (Schiebungen), die aus jenen Spiegelelementen gebildet sind.

Danach haben wir, um gleich zum allgemeinsten Falle überzugehen, die für Strecken aufgestellte erste Voraussetzung so abzuändern:

Voraussetzung I. *Es sei irgendwie eine Schaar von Spiegelungen definirt von der Beschaffenheit, dass jede aus zwei dieser Spiegelungen gebildete Verwandtschaft sich in zwei andere Spiegelungen der Schaar zerlegen lässt, von welchen die eine beliebig aus der Schaar herausgegriffen werden darf.* [*Spiegelschaar I.*]

112. Sind R, S, T irgend drei unserer Spiegelungen, so giebt es unter den Spiegelungen nach dieser Voraussetzung stets eine weitere U, so dass die Gleichung gilt

$$\text{(I.)} \qquad RS = UT \qquad \text{oder}$$
$$RST = U, \qquad \text{d. h.:}$$

Satz a. *Die Folge von irgend drei Spiegelungen unserer Schaar kann stets durch eine einzige dieser Spiegelungen ersetzt werden.*

Aus der letzten Gleichung folgt dann

$$(RST)^2 = 1, \quad RST \neq 1, \qquad \text{d. h.:}$$

Satz b. *Zwischen irgend drei Spiegelungen R, S, T der Schaar bestehen stets die Beziehungen*

$$(RST)^2 = 1, \quad RST \neq 1, \qquad \text{(vgl. Nr. 101.)}$$
oder
$$(RS)T = T(SR) \qquad \text{(vgl. Nr. 99.).}$$

113. Gebraucht man eine früher eingeführte Ausdrucksweise (vgl. Nr. 97.), so kann man die Voraussetzung I. auch so fassen:

Es sei eine solche Schaar von Spiegelungen gegeben, dass eine jede aus ihnen gebildete zweispiegelige Verwandtschaft zu einer jeden Spiegelung der Schaar harmonisch ist (von ihr umgekehrt wird).

Es gilt aber nicht umgekehrt, dass jede Spiegelung, die zu einer solchen Verwandtschaft harmonisch ist, zur Spiegelschaar gehört. Dies sei verdeutlicht an einem

Beispiel: Wir wählen als Spiegelelemente sämmtliche Geraden $r, s, t \ldots$, die einzige Gerade a senkrecht treffen. Eine Verwandtschaft, die aus den Spiegelungen an zwei dieser Geraden zusammengesetzt ist, ist eine Schraubung um die Axe a, oder auch, wenn die beiden Spiegelgeraden parallel gewählt sind, eine Schiebung längs dieser Axe (vgl. die Sätze in Nr. 10. und Nr. 8.). Jede dieser Verwandtschaften kann nun in zwei Spiegelungen der Schaar zerlegt werden, von denen die eine beliebig aus ihr herausgegriffen werden kann. (Man vergleiche die Umkehrungen in Nr. 10. und 8.). Die Geraden, die die Gerade a senkrecht treffen, genügen demnach der ersten Voraussetzung. Eine Schiebung längs der Axe a kann aber ausserdem in die Spiegelungen an zwei parallelen Geraden zerlegt werden, die senkrecht zu a sind, aber a *nicht* treffen. Diese Geraden gehören nicht mehr zur Schaar und diese darf auch nicht durch sie erweitert werden, da dann die Voraussetzung I. nicht mehr erfüllt bliebe.

114. Greift man von den zweispiegeligen Verwandtschaften, die sich aus unserer Spiegelschaar bilden lassen, irgend zwei $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heraus, so kann man nach der Voraussetzung I. jede von ihnen so in zwei Spiegelungen zerlegen, dass für die zweite Spiegelung von $\mathfrak{A}$ und für die erste Spiegelung von $\mathfrak{B}$ ein und dieselbe Spiegelung S verwandt wird, d. h. man mache

$$\mathfrak{A} = RS, \quad \mathfrak{B} = ST,$$

dann wird

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = RSST = RT,$$

d. h. die Folge von zwei aus den Spiegelungen der Schaar gebildeten zweispiegeligen Verwandtschaften ist wieder eine solche Verwandtschaft. Alle diese Verwandtschaften bilden daher eine *Gruppe* (vgl. Nr. 50.).

Bilden wir ausser der Folge

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = RT \qquad \text{auch}$$
$$\mathfrak{B}\mathfrak{A} = STRS,$$

so kommt wegen

$$1 = (RST)^2 \qquad \text{oder}$$
$$1 = RSTRST,$$

wenn wir beiderseits vorn R, hinten T zufügen, die Gleichung heraus

$$RT = STRS \qquad \text{oder}$$
$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}. \qquad \text{(Vgl. auch Nr. 104.)}$$

Dieses Ergebniss mit dem vorigen zusammengefasst giebt den

Satz. *Alle Verwandtschaften, die aus je zwei Spiegelungen unserer Schaar I. zusammengesetzt sind, bilden eine Gruppe vertauschbarer Verwandtschaften.* [*Gruppe I.*]

Anmerkung. Dieser Satz lässt sich nicht umkehren, da unmöglich aus der Eigenschaft einer Gruppe, dass sie aus vertauschbaren zwei spiegeligen Verwandtschaften besteht, das Vorhandensein einer Spiegelschaar geschlossen werden kann, die diese Gruppe erzeugt, und die erste Voraussetzung erfüllt.

Wenn also in der vorliegenden Arbeit nur eine Klasse von Gruppen vertauschbarer zweispiegeliger Verwandtschaften behandelt wird, so ist dies doch eine ausserordentlich wichtige Klasse. So liefert z. B. die Theorie der kongruenten und symmetrisch-gleichen räumlichen Systeme eine Fülle verschiedenartiger Gruppen solcher Verwandtschaften. Alle diese Gruppen lassen sich aber aus einer Gesammtheit von Spiegelungen erzeugen, die der ersten Voraussetzung genügt.

115. Da die Folge von irgend drei Spiegelungen unserer Schaar gleich einer einzigen dieser Spiegelungen ist (nach 112 a) und da die Folge von irgend vier dieser Spiegelungen $KLMN = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ gleich der Folge von zweien ist, $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = RT$ (vgl. 114.) so folgt durch mehrfache Anwendung dieser Sätze der

Satz. *Die Folge einer beliebigen ungeraden oder geraden Anzahl von Spiegelungen unserer Schaar lässt sich stets auf eine einzige bezw. die Folge von zwei dieser Spiegelungen zurückführen.*

Oder in anderen Worten:

Alle Verwandtschaften, die sich als Folge einer beliebigen Anzahl von Spiegelungen unserer Schaar darstellen lassen, bilden eine Gruppe, in der diejenigen Verwandtschaften, welche aus einer geraden Anzahl dieser Spiegelungen zusammengesetzt sind, eine Untergruppe ausmachen. [*Erweiterte Gruppe I.*]

116. Betrachtet man eine beliebige Folge von Spiegelungen unserer Schaar

$$R_1 S_1 R_2 S_2 R_3 S_3 \ldots\ldots,$$

so lässt die zwischen je drei von ihnen bestehende Gleichung $(R_1 S_1 R_2)^2 = 1$ (vgl. 112 b) eine Anwendung zu, die das Rechnen mit solchen Spiegelfolgen erleichtert, und deren Analogon für

das Rechnen mit Strecken sich bei MÖBIUS[1]) findet. Jene Gleichung kann auch geschrieben werden

$$R_1 S_1 R_2 = R_2 S_1 R_1 ,$$

d. h. in jeder Folge von solchen Spiegelungen können die beiden Spiegelungen R_1 und R_2, die irgend einer, S_1, nach rechts und links benachbart sind, vertauscht werden. Wie R_1 mit R_2, so kann R_2 mit R_3 vertauscht werden u. s. w. Da aber durch Vertauschung je zweier benachbarter Elemente R_i jede beliebige Vertauschung zwischen den R_i hergestellt werden kann, und da dasselbe auch für die S_i gilt, so hat man den

Satz. *In einer jeden Folge von Spiegelungen unserer Schaar lassen sich sowohl die geradstelligen Spiegelungen wie auch die ungeradstelligen unter sich beliebig vertauschen.*

Die zweite Voraussetzung.

117. Die Forderung, dass bei gegebenen Spiegelungen O, P unserer Schaar für jedes ganze ν eine Spiegelung M der Schaar vorhanden sei, für welche die Gleichung gilt

(II.) $$(OM)^\nu = OP ,$$

lässt eine Unterscheidung in zwei Fälle zu, je nachdem nämlich die Spiegelung M *eindeutig* oder *mehrdeutig* bestimmt ist. Nur im ersten Falle erhalten wir eine Gruppe zweispiegeliger Verwandtschaften, die *vollkommen* denselben Gesetzen unterliegen, wie sie bei der Streckenaddition gelten.

Voraussetzung IIa. *Es möge irgendwie eine Spiegelschaar definirt sein, die der Voraussetzung I. genüge und ausserdem die Eigenschaft habe, dass es für irgend zwei ihrer Spiegelungen O und P und bei gegebener ganzer Zahl ν stets eine und nur eine Spiegelung M der Schaar giebt, die der Gleichung genügt*

(II.) $$(OM)^\nu = OP . \qquad [\textit{Teilungsgleichung.}]$$

Eine solche Schaar heisse eine *Spiegelschaar Ia.*

118. Setzt man $\nu = 2$, so erhält man

$$OMOM = OP ,$$

oder indem man beiderseits vorn MO zufügt,

$$OM = MP .$$

---

1) MÖBIUS Gesammelte Werke I. a. a. O. Nr. 6.



Diese Gleichung sagt aus (36.), dass die Spiegelung O durch M in P übergeführt wird.

Wir wollen eine solche Spiegelung M, die O in P überführt, eine *mittlere Spiegelung zwischen O und P* nennen.

Dann gilt der

Satz. *Zwischen je zwei Spiegelungen der Schaar Ia. giebt es stets eine und nur eine mittlere Spiegelung, die ebenfalls der Schaar angehört.*

Denn gäbe es noch eine zweite solche Spiegelung M', für welche

$$O M' = M' P$$

wäre, so würde daraus folgen, indem man beiderseits vorn $O M'$ zufügt:

$$(O M')^2 = O P \; ,$$

also müsste (nach Vor. Ia) $M' = M$ sein.

Anmerkung. *Ausserhalb* der Spiegelschaar können immerhin noch weitere mittlere Spiegelungen vorhanden sein. So bilden z. B. alle Umwendungen um Axen, die einem Parallelstrahlbündel angehören, eine Spiegelschaar Ia., und es giebt zwischen zwei Graden o, p der Schaar eine mittlere m der Schaar. Ausserdem genügt aber auch jede Gerade m_1, die zur Ebene von o und p senkrecht ist, und m trifft, der Gleichung $o\, m_1\} = \{m_1 p\}$. An diesem Beispiel einer Spiegelschaar Ia. kann gleichzeitig erkannt werden, dass auch die allgemeinere Gleichung $\{o\, m\}^\nu = \{op\}$ *mehrdeutig* befriedigt werden kann, falls man für $\{m\}$ auch Spiegelungen zulässt, die ausserhalb der Schaar liegen.

Da jetzt in unserer Gruppe zweispiegeliger Verwandtschaften völlige Uebereinstimmung mit der Streckenaddition herrscht, so können wir die Sätze, die Möbius und H. Grassmann[1]) für die Streckenaddition aufgestellt haben, genau so beweisen, wie es dort geschieht. Insbesondere werden die Sätze über geometrische Mittelpunkte (Schwerpunkte) in unserer Gruppe ihr Analogon finden.

Wir stellen hier die Sätze, die wir in den geometrischen Anwendungen (im XIV. Abschnitt) verwerten werden, kurz zusammen.

---

1) Möbius, a. a. O. H. Grassmann »Die lineale Ausdehnungslehre« (1844) § 24.

119. Sind R, S, T, U vier Spiegelungen der Schaar Ia, für die die Gleichung besteht[1])

$$(\alpha) \qquad RS = UT\,,$$

so bestimme man (Vor. Ia) in der Schaar die Spiegelung M, für welche ist:

$$(\beta_1) \qquad RM = MT\,,$$

dann wird:

$$SRRM = TUMT \qquad \text{(oder wegen 114.)}$$

$$SRRM = MTTU\,, \qquad \text{also}$$

$$(\beta_2) \qquad SM = MU\,.$$

Da im Beweise nur das Vorhandensein, nicht aber die Eindeutigkeit von M vorausgesetzt wurde, so können wir den damit bewiesenen Satz allgemein aussprechen:

Satz. *Gilt in einer Spiegelschaar I. die Gleichung* $RS = UT$ *und ist in ihr M eine mittlere Spiegelung zwischen R und T, so ist sie es auch zwischen S und U.*

Ist (β_1) und (β_2) vorausgesetzt, so ergiebt sich daraus, indem man die Folge der Gleichungen umkehrt, die Gleichung (α), d. h.:

Umkehrung. *Ist in einer Spiegelschaar I. M gleichzeitig mittlere Spiegelung zwischen R und T und zwischen S und U, so gilt die Gleichung* $RS = UT$.

120. Aus der Schaar Ia. seien ν Spiegelungen $P_1, P_2, \ldots P_\nu$ herausgegriffen, und hierzu noch eine weitere O, dann sei die Folge gebildet

$$OP_1\, OP_2 \ldots OP_\nu\,.$$

Diese Folge lässt sich (nach Nr. 115. und nach Vor. I.) ausdrücken durch

$$OP_1\, OP_2 \ldots OP_\nu = OP\,,$$

wo auch die Spiegelung P zu der Schaar gehört; dann kann gesetzt werden (Vor. IIa)

$$OP = (OM)^\nu\,,$$

wo M als Spiegelung der Schaar eindeutig bestimmt ist, und es wird

$$(1) \qquad OP_1\, OP_2 \ldots OP_\nu = (OM)^\nu\,.$$

1) Für die Figur wählen wir den einfachsten Fall der Punktspiegelung.

Wählt man aus der Spiegelschaar statt O irgend eine andere Spiegelung O' aus, so kann man setzen (wegen $O'^2 = 1$)

$$O O' O' P_1 \; O O' O' P_2 \, . \, . \; O O' O' P_\nu = (O M)^\nu ,$$

daraus erhält man durch Umstellung (116.)

$$(O O')^\nu \; O' P_1 \; O' P_2 \, . \, . \; O' P_\nu = (O M)^\nu ,$$

oder indem man beiderseits ν mal $O'O$ zufügt

$$O' P_1 \; O' P_2 \, . \, . \; O' P_\nu = (O' O)^\nu \; (O M)^\nu ,$$

und daraus wegen der Vertauschbarkeit

$$= (O' O O M)^\nu ,$$

also endlich wegen $O^2 = 1$

$$(1') \qquad O' P_1 \; O' P_2 \, . \, . \; O' P_\nu = (O' M)^\nu .$$

Dies giebt den

Satz. *Gilt für die Spiegelungen $P_1, P_2, \ldots P_\nu$, M und eine weitere Spiegelung O einer Spiegelschaar I. die Gleichung*

$$O P_1 \; O P_2 \, . \, . \; O P_\nu = (O M)^\nu ,$$

so gilt sie auch, wenn man O durch irgend eine andere Spiegelung O' der Schaar ersetzt.

Setzt man statt der beliebigen Spiegelung O die Spiegelung M ein, so wird wegen $MM = 1$

$$(2) \qquad M P_1 \; M P_2 \, . \, . \; M P_\nu = 1 \qquad \text{oder auch}$$

$$P_1 M \; P_2 M \, . \, . \; P_\nu M = 1 .$$

Ist umgekehrt durch eine Spiegelung M eine dieser beiden Gleichungen erfüllt, so folgt daraus auf dem umgekehrten Wege die Gleichung (1) für jede Spiegelung O der Schaar.

Nach den drei ersten Gleichungen dieser Nr. lässt sich die Spiegelung M aus den Spiegelungen $P_1, P_2, \ldots P_\nu$ und O, und — da die Wahl von O gleichgiltig ist — aus $P_1, P_2, \ldots P_\nu$ allein eindeutig bestimmen, d. h.:

Zusatz. *Aus ν beliebigen Spiegelungen $P_1, P_2, \ldots P_\nu$ einer Spiegelschaar Ia lässt sich eindeutig eine Spiegelung M der Schaar ableiten, für welche die Gleichung gilt:*

$$M P_1 \; M P_2 \, . \, . \; M P_\nu = 1 ;$$

es gilt dann auch für jede weitere Spiegelung O der Schaar die Gleichung

$$O P_1 \; O P_2 \, . \, . \; O P_\nu = (O M)^\nu .$$

Diese Spiegelung M nennen wir die mittlere zwischen den Spiegelungen $P_1, P_2, \cdot \cdot P_\nu$.

121. Auf einem von MÖBIUS in der Streckenrechnung eingeschlagenen Wege kann man jetzt diese mittleren Spiegelungen dazu benutzen, um die Folge von einer beliebigen Anzahl zweispiegeliger Verwandtschaften der Gruppe I. zu bilden.

Ist eine solche Folge gegeben

$$\mathfrak{A} = P_1 Q_1 P_2 Q_2 \cdot \cdot P_\nu Q_\nu ,$$

und sind M und N die mittleren Spiegelungen zwischen $P_1, P_2, \cdot \cdot P_\nu$ und zwischen $Q_1, Q_2, \cdot \cdot Q_\nu$, d. h. ist

$$(2) \qquad \begin{aligned} P_1 M P_2 M \cdot \cdot P_\nu M &= 1 \qquad \text{und} \\ N Q_1 N Q_2 \cdot \cdot N Q_\nu &= 1 , \end{aligned}$$

so wird wegen $M^2 = 1$ und $N^2 = 1$

$$\mathfrak{A} = P_1 MMNNQ_1 P_2 MMNNQ_2 \cdot \cdot P_\nu MMNNQ_\nu ,$$

also durch Umstellung (116.)

$$\mathfrak{A} = P_1 M P_2 M \cdot \cdot P_\nu M (MN)^\nu N Q_1 N Q_2 \cdot \cdot N Q_\nu ,$$

daher wegen (2)

$$P_1 Q_1 P_2 Q_2 \cdot \cdot P_\nu Q_\nu = (MN)^\nu . \qquad \text{D. h.}$$

Satz. *Statt die Folge von ν zweispiegeligen Verwandtschaften der Gruppe I. zu bilden, nehme man ν mal hintereinander eine einzige zweispiegelige Verwandtschaft, deren Anfangs- und Endspiegelung die mittlere der Anfangs- und Endspiegelungen der gegebenen Verwandtschaften ist.*

122. **Voraussetzung IIb.** *Sind wie bisher O und P zwei Spiegelungen einer Schaar, die der Vorraussetzung I. genügt, so sei wie bei IIa. vorausgesetzt, dass es innerhalb dieser Schaar eine Spiegelung M gäbe, welche die Gleichung*

$$\text{(II.)} \qquad (OM)^\nu = OP$$

befriedigt (wo ν eine ganze Zahl sei); wir setzen jetzt aber voraus, die Spiegelung M sei durch diese Gleichung mehrdeutig bestimmt.

123. Betrachten wir zuerst den Fall $\nu = 2$ und nehmen an, M und M' seien innerhalb der Spiegelschaar I. zwei verschiedene Lösungen der Gleichung (II.), also

$$\begin{aligned} (OM)^2 &= OP \qquad \text{und} \\ (OM')^2 &= OP , \qquad \text{wo} \\ M &\neq M' . \end{aligned}$$

Dann ergiebt sich, wie in Nr. 118.

$$OM = MP \quad \text{und}$$
$$OM' = M'P ,$$

d. h. M und M' sind *zwei mittlere Spiegelungen* der Spiegelungen O und P. Verknüpft man diese beiden Gleichungen, so wird

$$MOOM' = PMM'P$$
$$= M'PPM$$

(wegen der Vertauschbarkeit vgl. Nr. 116.), also

(1) $$MM' = M'M , \quad \text{und da}$$
$$MM' \neq 1$$

vorausgesetzt ist, so ist MM' selbst eine involutorische Verwandtschaft (48.), also

$$MM' = M'M = A$$

wo $$A^2 = 1 , \; A \neq 1 .$$

Diese Spiegelung A gehört nicht zur Schaar, denn die Verwandtschaft A, die ebenfalls der Gruppe angehört, kann nicht in A und noch eine Spiegelung zerlegt werden, sonst müsste diese zweite Spiegelung $= 1$ sein, was dem Begriff der Spiegelung widerspricht.

Ist aber R irgend eine Spiegelung der Schaar, so wird (Vor. I, vgl. Nr. 112.)

$$(MM'R)^2 = 1 \quad \text{oder}$$
$$MM'R = RM'M , \quad \text{also}$$
$$AR = RA .$$

Während die Gleichung $MM' = A$ aussagt, dass M zu M' und A zu M (und zu M') eine harmonische (mit ihr vertauschbare) Spiegelung sei (48.), ergiebt die letzte Gleichung, dass A zu jeder Spiegelung R der Schaar harmonisch ist, also:

Satz. *Giebt es innerhalb der Spiegelschaar I. zu irgend zwei Spiegelungen O und P der Schaar zwei verschiedene mittlere Spiegelungen M, M', so sind beide zu einander harmonisch und ihre Folge $MM' = A$ ist eine Spiegelung, die zu allen Spiegelungen der Schaar harmonisch ist.*

124. Dieser Satz lässt sich umkehren.

Umkehrung. *Ist A eine zu allen Spiegelungen der Schaar I. harmonische Spiegelung, und N eine mittlere Spiegelung zwischen irgend zwei Spiegelungen R und S der Schaar, so ist $AN = N'$ eine zweite mittlere Spiegelung zwischen R und S.*

Da A nach der Voraussetzung zu N harmonisch ist, so ist (nach 47. und 48.) $AN = N'$ ebenfalls eine Spiegelung, daher

$$A = NN' = N'N,$$

und da A auch zu R harmonisch ist, so ist

$$AR = RA, \qquad \text{also}$$
$$NN'R = RNN',$$

oder indem man beiderseits vorn N, hinten N' zufügt,

$$N'RN' = NRN.$$

Ist nun N mittlere Spiegelung zwischen R und S, so wird

$$RN = NS, \qquad \text{also}$$
$$S = NRN = N'RN' \qquad \text{oder}$$
$$SN' = N'R,$$

d. h. auch $N' = AN$ ist mittlere Spiegelung zwischen S und R.

Anmerkung. Die mittlere Spiegelung N' braucht nicht ebenfalls zur Schaar zu gehören. Wir geben *3 Beispiele*, an denen die möglichen Fälle zu erkennen sind.

a) Die Spiegelungen an allen Punkten des Raumes haben keine gemeinsame harmonische Spiegelung, doch bilden sie eine Schaar, die der Voraussetzung I. genügt. Daraus folgt (123, Satz), dass die Gleichung $OM = MP$ für M innerhalb der Schaar nicht mehrdeutig gelöst werden kann.

b) Die Spiegelungen an den Geraden eines Parallelstrahlbündels genügen der Voraussetzung I. Zu ihnen allen harmonisch ist die Spiegelung an jeder Ebene A, die auf den Strahlen des Bündels senkrecht steht. Sind o, p, m drei Strahlen des Bündels, für welche die Gleichung $\{om\} = \{mp\}$ gilt, so ist (68.) $\{mA\} = \{N\}$ die Spiegelung am Schnittpunkt N einer dieser Ebenen A mit der Geraden m; diese ist (nach der Umkehrung) ebenfalls eine Lösung der Gleichung, d. h. es ist $\{oN\} = \{Np\}$, keineswegs gehört sie aber der Schaar an.

c) Die Spiegelungen an den Geraden, die eine einzige Gerade o senkrecht treffen, genügen der Voraussetzung I. Die Spiegelung an dieser Geraden a selbst ist zu allen Spiegelungen der Schaar harmonisch; daher gehört (Umkehrung) zu einer Lösung $\{m\}$ der Gleichung $\{om\} = \{mp\}$ noch eine zweite $\{n\} = \{ma\}$. Da nun aber die Gerade a auch durch die Gerade n senkrecht getroffen wird (nach Nr. 70.), so gehört in diesem Falle auch die Spiegelung an n zur Schaar.

125. Gehen wir zu einem allgemeinen ν über, und nehmen an, es gäbe zwei verschiedene Spiegelungen der Schaar, M und M', die die Gleichung II. erfüllen, also

$$(OM)^\nu = OP$$

und

$$(OM')^\nu = OP, \qquad \text{wo } M \neq M'.$$

so folgt daraus

$$(O\,M)^\nu = (O\,M')^\nu \qquad \text{oder}$$

$$1 = (M\,O)^\nu\,(O\,M')^\nu\,,$$

daraus wegen der Vertauschbarkeit

$$1 = (M\,O\,O\,M')^\nu \qquad \text{oder}$$

$$1 = (M\,M')^\nu\,.$$

Um diese Gleichung weiter zu behandeln, setzen wir

$$M\,M' = M'\,M'' = \cdot\cdot = M^{(\nu-1)}\,M^{(\nu)}\,,$$

wo (wegen Vor. I.) auch M', M'', $\cdot\cdot$ $M^{(\nu)}$ zur Schaar gehören. Dann wird

$$1 = (M\,M')^\nu = M\,M'\,M'\,M'' \cdot\cdot\, M^{(\nu-1)}\,M^{(\nu)}$$

$$1 = M\,M^{(\nu)}\,, \qquad \text{also}$$

$$M^{(\nu)} = M\,.$$

Dabei ist (falls ν keine Primzahl ist) nicht ausgeschlossen, dass die $M^{(i)}$ teilweise untereinander gleich werden.

Die Spiegelungen M, M', M'', $\cdot\cdot$, die der Bedingung

$$M\,M' = M'\,M'' = \cdot\cdot = M^{(\nu-1)}\,M$$

genügen, nennt man ein *cyklisches System von Spiegelungen mit der Periode* ν, falls in der Reihe keine gleichen Spiegelungen vorkommen.

Sind nun $M^{(i)}$ und $M^{(k)}$ irgend zwei Spiegelungen dieses Systems, so erhält man

$$(M^{(i)}\,M^{(k)})^\nu = (M^{(i)}\,M^{(i+1)}\,M^{(i+1)}\,M^{(i+2)}\,\cdot\cdot\,M^{(k-1)}\,M^{(k)})^\nu$$

$$= (M\,M'\,M\,M' \cdot\cdot\, M\,M')^\nu\,,$$

$$= (M\,M')^\nu\,(M\,M')^\nu \cdot\cdot\,(M\,M')^\nu, \quad \text{also}$$

$$(M^{(i)}\,M^{(k)})^\nu = 1\,, \quad \text{und insbesondere}$$

$$(M\,M^{(i)})^\nu = 1\,.$$

Bildet man nun

$$(O\,M^{(i)})^\nu = (O\,M\,M\,M^{(i)})^\nu\,,$$

so wird dies wegen der Vertauschbarkeit (114.)

$$= (O\,M)^\nu\,(M\,M^{(i)})^\nu = O\,P\,,$$

also

$$(O\,M^{(i)})^\nu = O\,P\,, \qquad \text{d. h.}$$

Satz. *Sind in der Spiegelschaar I. zwei Spiegelungen M und M' vorhanden, die gleichzeitig die Gleichung (II.) befriedigen,*

so erzeugen diese ein cyklisches System von Spiegelungen M, M', M'', $\cdot\cdot M^{(\nu-1)}$, *die der Schaar angehören und gleichfalls jene Gleichung befriedigen.*

Auch hier ist nicht ausgeschlossen, dass gleiche unter den Spiegelungen vorhanden sind.

126. Die Sätze in Nr. 119. bis 121. sind unter der Voraussetzung geführt, dass es eine Spiegelung giebt, die der Gleichung (II.) genügt. *Sieht man also von der Eindeutigkeit der Bestimmung dieser Spiegelung M ab, so gelten die dort aufgestellten Gleichungen auch dann noch, wenn man für M irgend eine des cyklischen Systems auswählt und in sie einträgt.*

XVI. Geometrische Anwendungen.

Gruppen von projektiven Schiebungen und von Schraubungen. Polare Gebilde zu einer Gruppe von Punkten, von Ebenen, von windschiefen Geraden und von Umwendaxen.

127. Neue Beispiele von Spiegelschaaren, die den Bedingungen I. und IIa. genügen, gewinnt man leicht aus dem zur Einführung benutzten Beispiele der Punktspiegelung durch die bekannten *Abbildungsmethoden* (vgl. Nr. 91, a.) der projektiven und der dualen Uebertragung. Doch erhält man so keine wesentlich neuen Sätze, und es ist auch nicht die Methode der Spiegelgleichungen, die erst eine solche Uebertragung anbahnt. Man findet ja auch ohne Spiegelgleichung, dass die unendlich ferne Ebene zu einer Punktgruppe und ihrem Schwerpunkt eine ganz analoge Lage hat, wie eine beliebige Ebene zu einer Punktgruppe und dem Pole der Ebene, oder ein beliebiger Punkt zu einer Ebenengruppe und ihrer Polare.

Es hat aber die nicht durch einen Algorithmus begründete Methode der »Abbildung« von Sätzen, abgesehen von der Beschränktheit ihrer Anwendung, den erheblicheren Mangel, dass sie verschiedene Gebiete der Geometrie in eine *nicht innerlich begründete Abhängigkeit* bringt. Es muss derjenige, der die projektive Geometrie rein geometrisch betreibt, seine Beweise so liefern können, dass sie von Sätzen der nicht-projektiven Geometrie unabhängig sind, und dies gilt (was neuerdings wenig



beachtet worden ist) auch umgekehrt. Aber andererseits dürfen Sätze, die in zweierlei Gebieten der Geometrie parallel neben einander herlaufen, nicht auf völlig verschiedene Schlussmethoden gegründet werden. Dass es nicht zwei sich widersprechende Forderungen sind, *Unabhängigkeit* und doch *Gleichartigkeit* der Beweise zu verlangen, dies wird eben an unserer Methode deutlich: *entsprechende Beweise in zwei Gebieten der Geometrie werden durch entsprechende Folgen von Gleichungen geführt, und nur die Gebilde, die in die Gleichungen eintreten, sind in beiden Gebieten verschieden.*

Und gehen wir von den »Abbildungen« zu den allgemeineren »formalen Uebertragungen« über (vgl. Nr. 91, b_2), so erhalten wir ausserdem die Möglichkeit neue Sätze aufzufinden, da diese Art der Uebertragung bisher weit weniger verwendet worden ist, wie die der Abbildung. Mit ihrer Hilfe werden wir im Folgenden auf eine merkwürdige Analogie zwischen der Geometrie der *Punkte* (oder Ebenen) *des Raumes* und der Geometrie der *Geraden des Raumes* geführt, vermöge welcher *jeder Geraden des Raumes in Bezug auf eine Gruppe von Geraden eine bestimmte weitere Gerade polar zugeordnet ist*[1]).

Ich halte es für besonders wichtig, dass die im folgenden abgeleiteten projektiven Sätze (Abschnitt A. und B.) unabhängig vom Grundsatz der projektiven Geometrie bewiesen werden[2]).

1) Um für eine Gruppe von ν Geraden im Raume eine allgemeine Polarentheorie zu gewinnen — die weiter unten ausgeführte Konstruktion liefert nur die letzte Polare — hat man die in meiner Habilitationsschrift entwickelten Methoden anzuwenden. Dabei treten an Stelle der Projektivitäten in der Geraden die aus zwei kollinearen Spiegelungen zusammengesetzten Verwandtschaften des Raumes.

2) In einem Vortrage »Ueber Grundlagen und Aufbau der Geometrie« (vgl. die »Verhandlungen der Gesellschaft deutscher Naturforscher u. Aerzte«, 64. Versammlung zu Halle, 1891, II. Band, S. 8, oder den Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung I, 1890—91, S. 45) habe ich auf den Unterschied derjenigen geometrischen Sätze hingewiesen, die sich ausschliesslich auf die formalen Operationen des Verbindens und Schneidens der Grundelemente Punkte, Geraden, Ebenen, stützen, und derjenigen, die noch weitere Voraussetzungen, wie z. B. die der Stetigkeit benützen. Zur ersten Klasse gehören sicherlich die im folgenden benützten Sätze über die perspektiven Kollineationen und über harmonische Elemente. Dagegen greifen alle bekannten Beweise des »Grundsatzes der projektiven Geometrie« auf Stetigkeitsbetrachtungen zurück. Um die Grenze dieser beiden Klassen festzustellen, ist es nöthig, so viel als irgend geht, ohne

Es ist daher nöthig, so weit auf die Herleitung dieser Sätze aus den Grundeigenschaften des Projicirens und Schneidens einzugehen, dass diese Unabhängigkeit zu erkennen ist. Auch die auf Streckengleichheit gegründeten Sätze nehmen im Gebiet der nicht-projektiven Geometrie einen besonderen Platz ein, da sie vom Begriff der Länge und Kongruenz unabhängig abgeleitet werden können.

Zum Schluss wird noch ein *Beispiel einer Spiegelschaar* gegeben, *die den Bedingungen I. und IIb. genügt.* Es ist dies die Gesammtheit aller Umwendungen, deren Axen eine und dieselbe Gerade senkrecht treffen; diese Schaar führt auf die Gruppe von allen Schraubungen um ein und dieselbe Schraubenaxe.

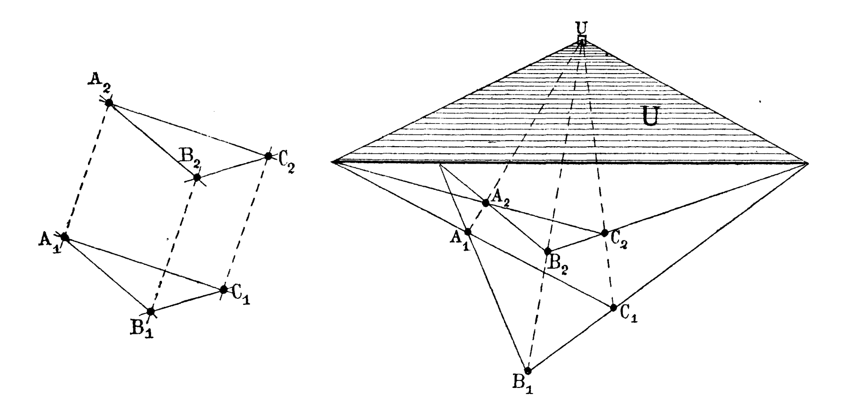
A. Projektive Schiebungen erster Art.

128. Sollen zwei Strecken einander gleich sein, $\overline{A_1 A_2} = \overline{B_1 B_2}$, so müssen sie unter einander parallel sein und ausserdem ihre Anfangspunkte und ihre Endpunkte auf parallelen Geraden liegen. Diese Eigenschaft reicht aus, um unabhängig vom Begriff der Länge zu einer Strecke $\overline{A_1 A_2}$ das ganze System der ihr gleichen Strecken (abgesehen von denen, die in derselben Geraden wie $\overline{A_1 A_2}$ liegen) zu finden, oder was dasselbe heisst (107.), um in derjenigen Schiebung, die dem Punkte A_1 den A_2 zuordnet, zu irgend einem (ausserhalb der Geraden $A_1 A_2$ gelegenen) Punkte den entsprechenden zu finden.

Aus der Figur dreier Ebenen, die eine Richtung gemein haben und von zwei parallelen Ebenen geschnitten werden, folgt, *dass man zu einem Punkte C_1 denselben entsprechenden Punkt C_2 findet, ob man von dem ursprünglich gegebenen Paar A_1, A_2 oder von einem daraus erst konstruirten Paar B_1, B_2 ausgeht.* Nur wenn alle drei Paare in einer Ebene liegen, muss zum Beweise ein ausserhalb der Ebene liegendes Hilfspaar eingeführt werden; der Satz gestattet dann auch auf der Geraden $A_1 A_2$ selbst zu jedem Punkte den entsprechenden zu finden, worauf wieder durch Einführung geeigneter Hilfspaare der Satz ohne Einschränkung für jede drei Paare gefolgert werden kann.

Stetigkeitsbetrachtungen zu erledigen. Die folgenden Sätze gehören dieser aus den Operationen des Verbindens und Schneidens allein abgeleiteten Klasse an.

Anmerkung. Die Notwendigkeit einen Umweg zu machen, um von zwei Punkten A_1, A_2 auf Punkte ihrer Verbindungsgeraden zu kommen, tritt auch im folgenden an einigen Stellen auf, ohne dass wir die dadurch notwendige Vervollständigung des Beweises, die genau wie hier verläuft, besonders liefern[1]).



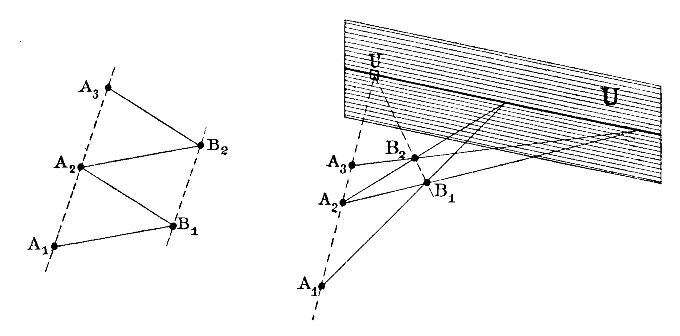
129. Wir wollen unmittelbar die erzeugende Operation statt der daraus abgeleiteten Sätze projektiv übertragen. An Stelle des gemeinsamen unendlich fernen Punktes der Strecken wählen wir jetzt einen beliebigen Punkt U als *Centrum* und an Stelle der unendlich fernen Ebene eine durch den Punkt U gehende Ebene **U** und nennen sie *Spurebene*.

Ordnen wir dann einem beliebigen Punkte A_1 einen auf der Geraden $A_1 U$ gelegenen Punkt A_2 zu, dann ist jedem weiteren Punkte B_1 ein einziger Punkt B_2 so zugeordnet, *dass die beiden entsprechenden Punkte* B_1, B_2 *wieder mit* U *in einer Geraden liegen*, während die entsprechende Paare verbindenden Geraden $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ sich in **U** schneiden, woraus dann folgt, dass auch die durch drei Punkte A_1, B_1, C_1 und die durch ihre drei entsprechenden Punkte A_2, B_2, C_2 gelegten Ebenen sich in einer Geraden der Ebene **U** schneiden. Auch diese Beziehung ist unabhängig vom Ausgangspaar und ordnet dann jedem Punkte des Raumes

1) Auf die genauere Ausführung dieser Sätze, die hier nur als Hilfssätze auftreten, kann ich um so eher verzichten, da ich an anderer Stelle darauf zurückkommen muss.

einen bestimmten Punkt zu, und zwar so, *dass den Punkten einer Geraden oder Ebene wieder die Punkte einer Geraden oder Ebene entsprechen, welche die erste in einem Punkte oder einer Geraden der Ebene* **U** *trifft.*

Die so definirte Verwandtschaft nennen wir eine *projektive Schiebung erster Art mit dem Centrum U und der Spurebene* **U**[1]. Wir bezeichnen sie mit 𝔄.



130. Soll in der projektiven Schiebung 𝔄, die dem Punkte A_1 den Punkt A_2 zuordnet, zu diesem Punkte A_2 wieder der entsprechende gesucht werden, so hat man die Konstruktion aus einem Hilfspaar B_1, B_2 herzuleiten, das nicht auf der Geraden $A_1 A_2$ liegt. Da sich die Geraden $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ in U treffen, und das Paar $A_1 A_2$ aus einem Punkte der Spurebene nach B_1, B_2, dieses Paar aber aus einem weiteren Punkte der Spurebene nach A_2, A_3 projicirt werden, so bilden die zwei Spurpunkte zusammen mit B_1 und B_2 ein vollständiges Viereck, auf dessen Nebenseite $A_2 U$ die beiden Punkte A_1, A_3 durch die Punkte A_2 und U harmonisch getrennt werden. D. h.:

Satz. *Ordnet eine projektive Schiebung* 𝔄 *einem Punkte A_1 den Punkt A_2 zu, so ordnet ihre Wiederholung, d. h. die Verwandtschaft* $𝔄^2$, *dem Punkte A_1 seinen vierten harmonischen A_3 zu A_2 und dem Centrum U zu.*

Da aber die Verwandtschaft $𝔄^2$ ihrer Definition zu Folge ebenfalls eine projektive Schiebung mit dem Centrum U und der Spurebene **U** ist, so kann man umgekehrt sie als eine beliebige

1) Sie ist eine *perspektive Kollineation*, bei welcher das Centrum in der Spurebene liegt. Ueber diese Verwandtschaft vergleiche man v. STAUDT, Geometrie der Lage Nr. 135.

solche Verwandtschaft $\mathfrak{A}'$ ansehen und aus ihr diejenige projektive Schiebung suchen, deren Wiederholung $\mathfrak{A}'$ ergiebt. Ist in dieser dem Punkte A_1 der Punkt A_2 zugeordnet, so muss in $\mathfrak{A}'$ (nach dem Satze) der vierte harmonische A_3 von A_1 zu A_2 und U zugeordnet sein. Daher ist auch bei gegebenem A_1 und A_3 der Punkt A_2 als vierter harmonischer von U zu A_1 und A_3 bestimmt:

Umkehrung. *Ordnet eine projektive Schiebung $\mathfrak{A}'$ einem Punkte A_1 den Punkt A_3 zu, so ist sie die Wiederholung derjenigen projektiven Schiebung, die dasselbe Centrum U und dieselbe Spurebene* **U** *wie jene hat, und welche dem Punkte A_1 den vierten harmonischen A_2 von U zu A_1 und A_3 zuordnet.*

Satz. *Es giebt nur eine einzige projektive Schiebung, deren Wiederholung eine gegebene projektive Schiebung $\mathfrak{A}'$ liefert.*

Denn der dem Punkt A_1 entsprechende Punkt A_2 ist eindeutig bestimmt, und somit ist es auch die Schiebung $\mathfrak{A}$, da sie Centrum und Spurebene mit $\mathfrak{A}$ gemein hat.

131. Die Spiegelung an einem Punkte geht durch projektive Uebertragung in die projektive Spiegelung an einem aus Punkt und Ebene bestehenden Paare über; die Ebene ist diejenige, die bei der Uebertragung aus der unendlich fernen Ebene hervorgeht.

Wenn wir daher früher die Schiebung als Folge zweier Punktspiegelungen dargestellt haben, so wird jetzt die projektive Schiebung als Folge zweier projektiven Spiegelungen ausgedrückt werden können, welche die Spurebene zum gemeinschaftlichen Spiegelelement haben. Der direkte Beweis dafür geht aus einem Satze hervor, den wir in seiner allgemeinsten Form voranstellen.

Die projektiven Spiegelungen sowohl an Punkt und Ebene, wie an zwei windschiefen Geraden sind *kollineare Verwandtschaften*[1]). Daraus folgt, dass Punkte einer Geraden wieder in solche Punkte und insbesondere vier harmonische Punkte einer Geraden wieder in solche gespiegelt werden. Hieraus ergiebt sich aber der

---

1) Die Spiegelung an Punkt und Ebene kann als besonderer Fall einer perspektiven Kollineation aufgefasst werden, bei der das Centrum nicht (wie bei der projektiven Schiebung) in der Spurebene liegt, bei der aber irgend ein Paar entsprechender Punkte (und in Folge dessen jedes Paar) harmonisch zum Centrum und zur Spurebene liegt. Da die Folge zweier kollinearen Verwandtschaften wieder eine solche ist, so ist auch die Spiegelung an einem Geradenpaare, die sich (nach 81.) in zwei Spiegelungen an Punkt und Ebene zerlegen lässt, kollinear.

Satz. *Werden durch eine Spiegelung* $\begin{Bmatrix}\mathfrak{s}_1\\ \mathfrak{s}_2\end{Bmatrix}$ *zwei Spiegelelemente* $\mathfrak{r}_1$ *und* $\mathfrak{r}_2$ *(also Punkt und Ebene, die nicht in einander liegen, oder zwei Geraden, die nicht in derselben Ebene liegen) in die Elemente* $\mathfrak{r}_1'$ *und* $\mathfrak{r}_2'$ *übergeführt, so geht dabei die Spiegelung* $\begin{Bmatrix}\mathfrak{r}_1\\ \mathfrak{r}_2\end{Bmatrix}$ *in die Spiegelung* $\begin{Bmatrix}\mathfrak{r}_1'\\ \mathfrak{r}_2'\end{Bmatrix}$ *über.*

Denn entsprechen sich zwei Punkte A_1, A_2 in der Spiegelung $\begin{Bmatrix}\mathfrak{r}_1\\ \mathfrak{r}_2\end{Bmatrix}$, so hat ihre Verbindungsgerade sowohl mit dem Spiegelelement $\mathfrak{r}_1$, wie mit $\mathfrak{r}_2$ einen Punkt gemein, und beide Punkte liegen zum Paar A_1, A_2 harmonisch; daher müssen auch die beiden Punkte A_1' und A_2' und die Punkte der Spiegelelemente $\mathfrak{r}_1'$ und $\mathfrak{r}_2'$, in die jene Punkte durch $\begin{Bmatrix}\mathfrak{s}_1\\ \mathfrak{s}_2\end{Bmatrix}$ übergeführt werden, wiederum auf einer Geraden harmonisch liegen, also A_1' und A_2' sich in der Spiegelung $\begin{Bmatrix}\mathfrak{r}_1'\\ \mathfrak{r}_2'\end{Bmatrix}$ entsprechen, d. h. es wird die Spiegelung $\begin{Bmatrix}\mathfrak{r}_1\\ \mathfrak{r}_2\end{Bmatrix}$ durch $\begin{Bmatrix}\mathfrak{s}_1\\ \mathfrak{s}_2\end{Bmatrix}$ in $\begin{Bmatrix}\mathfrak{r}_1'\\ \mathfrak{r}_2'\end{Bmatrix}$ übergeführt.

Es gilt daher (36.) die Gleichung:

$$\begin{Bmatrix}\mathfrak{r}_1 & \mathfrak{s}_1\\ \mathfrak{r}_2 & \mathfrak{s}_2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\mathfrak{s}_1 & \mathfrak{r}_1'\\ \mathfrak{s}_2 & \mathfrak{r}_2'\end{Bmatrix}.$$

Umkehrung. *Gilt diese Gleichung, so wird das Spiegelelement* $\mathfrak{r}_1$ *durch* $\begin{Bmatrix}\mathfrak{s}_1\\ \mathfrak{s}_2\end{Bmatrix}$ *in eines der Spiegelelemente* $\mathfrak{r}_1'$, $\mathfrak{r}_2'$ *übergeführt,* $\mathfrak{r}_2$ *aber in das andere.*

Denn würde $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$ in $\mathfrak{r}_1''$ und $\mathfrak{r}_2''$ übergeführt, so würde nach dem Satz die Gleichung gelten

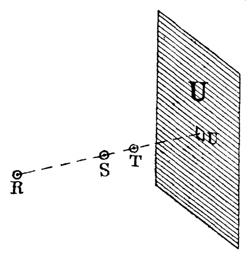
$$\begin{Bmatrix}\mathfrak{r}_1 & \mathfrak{s}_1\\ \mathfrak{r}_2 & \mathfrak{s}_2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\mathfrak{s}_1 & \mathfrak{r}_1''\\ \mathfrak{s}_2 & \mathfrak{r}_2''\end{Bmatrix};$$

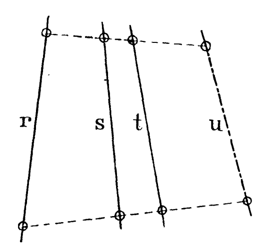
durch Vergleichung dieser mit der obigen Gleichung erhält man, indem man die beiden rechten Seiten gleichsetzt und dann beiderseits vorn $\begin{Bmatrix}\mathfrak{s}_1\\ \mathfrak{s}_2\end{Bmatrix}$ zufügt,

$$\begin{Bmatrix}\mathfrak{r}_1'\\ \mathfrak{r}_2'\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\mathfrak{r}_1''\\ \mathfrak{r}_2''\end{Bmatrix}.$$

Daher müssen die Spiegelelemente $\mathfrak{r}_1'$ und $\mathfrak{r}_2'$ entweder den Elementen $\mathfrak{r}_1''$ und $\mathfrak{r}_2''$ oder $\mathfrak{r}_2''$ und $\mathfrak{r}_1''$ gleich sein, w. z. b. w.

132. Wenden wir diesen Satz auf projektive Spiegelungen an, die eine Ebene oder eine Gerade als gemeinsames Spiegelelement besitzen, so muss, da dieses in sich gespiegelt wird,

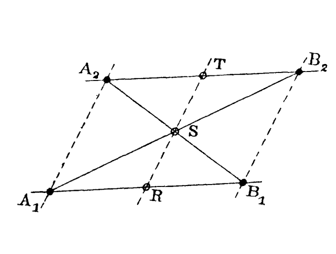


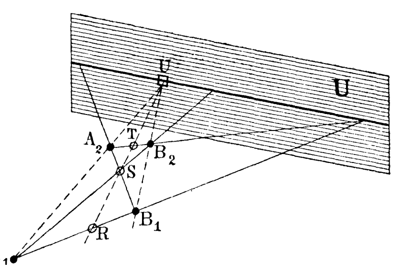


das andere der ersten Spiegelung in das andere der letzten gespiegelt werden, und wir erhalten so für die Gleichungen

$$\begin{Bmatrix} R & S \\ \mathbf{U} & \mathbf{U} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S & T \\ \mathbf{U} & \mathbf{U} \end{Bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{Bmatrix} r & s \\ u & u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} s & t \\ u & u \end{Bmatrix}$$

die geometrischen Bedingungen, *dass der Punkt R an* $\begin{Bmatrix} S \\ \mathbf{U} \end{Bmatrix}$ *in T und die Gerade r an* $\begin{Bmatrix} s \\ u \end{Bmatrix}$ *in t gespiegelt wird*, deren erste man noch so fassen kann, *dass die Punkte R, S, T in einer Geraden liegen und in ihr die Punkte R und T von S und dem Schnittpunkt mit* **U** *harmonisch getrennt werden.*





133. Die erste Gleichung der vorigen Nummer sagt aus, dass, wenn man einen Punkt A_1 erst an $\begin{Bmatrix} R \\ \mathbf{U} \end{Bmatrix}$ nach B_1 und diesen an $\begin{Bmatrix} S \\ \mathbf{U} \end{Bmatrix}$ spiegelt, man auf denselben Punkt A_2 kommt, als wenn man A_1 zuerst an $\begin{Bmatrix} S \\ \mathbf{U} \end{Bmatrix}$ nach B_2 und diesen an $\begin{Bmatrix} T \\ \mathbf{U} \end{Bmatrix}$ gespiegelt hätte. Der

Satz ist also nur ein Ausdruck der harmonischen Lage von Punkten in einem vollständigen Viereck, dessen Ecken die Punkte A_1, A_2, B_1, B_2 und von dessen Nebenecken die eine in S, eine zweite in U, die dritte in der Ebene $\mathbf{U}$ liegt, während die Nebenseite SU die Seiten des Vierecks noch in den Punkten R und T trifft.

Da demnach die beiden Geraden $A_1 A_2$ und RT in U, die Geraden $A_1 R$ und $A_2 T$ in einem Punkte von $\mathbf{U}$ zusammenlaufen, so bringt die Folge der Spiegelungen $\begin{Bmatrix} R & S \\ \mathbf{U} & \mathbf{U} \end{Bmatrix}$ den Punkt A_1 in dieselbe Lage A_2, wie eine projektive Schiebung mit dem Centrum U und der Spurebene $\mathbf{U}$, in welcher dem Punkte R der Punkt T entspricht, das ist aber (nach 130, Umkehrung) die Schiebung, die durch Wiederholung derjenigen entsteht, welche dem Punkte R den Punkt S zuordnet, und U zum Centrum, $\mathbf{U}$ zur Spurebene hat. Da dies für jedes Paar A_1, A_2 gilt, so folgt der

Satz. *Die Verwandtschaft* $\begin{Bmatrix} R & S \\ \mathbf{U} & \mathbf{U} \end{Bmatrix}$ *entsteht durch Wiederholung derjenigen projektiven Schiebung, welche dem Punkte R den Punkt S zuordnet und welche $\mathbf{U}$ zur Spurebene und deren Schnittpunkt mit der Geraden RS zum Centrum hat.*

Zugleich folgt die

Umkehrung. *Jede projektive Schiebung mit der Spurebene $\mathbf{U}$, in der einem Punkte A_1 der Punkt A_2 zugeordnet ist, lässt sich in zwei projektive Spiegelungen zerlegen, die die Spurebene zur gemeinsamen Spiegelebene haben.*

Von den Spiegelpunkten R und S der beiden Spiegelungen kann für den einen jeder beliebige Punkt des Raumes (ausserhalb $\mathbf{U}$) gewählt werden, während der andere so bestimmt werden muss, dass dem Punkte R der Punkt S in derjenigen projektiven Schiebung entspricht, deren Wiederholung die gegebene Schiebung ergiebt.

Oder in anderer Fassung:

Zusatz I. *Sind eine Ebene $\mathbf{U}$ und drei beliebige ausserhalb ihr gelegene Punkte Q, R, S gegeben, so ist dadurch eindeutig ein Punkt P so bestimmt, dass wird:*

$$\begin{Bmatrix} R & S \\ \mathbf{U} & \mathbf{U} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q & P \\ \mathbf{U} & \mathbf{U} \end{Bmatrix}.$$

Hier entspricht nun dem Punkte R der Punkt S und dem Punkte Q der Punkt P in ein und derselben projektiven Schiebung, die $\mathbf{U}$ zur Spurebene hat.

Aus der Gleichung folgt noch, dass für irgend drei Punkte Q, R, S und eine (nicht durch sie hindurch gehende) Ebene U stets die Bedingung gilt

$$\begin{Bmatrix} Q & R & S \\ \mathsf{U} & \mathsf{U} & \mathsf{U} \end{Bmatrix}^2 = 1\,, \quad \begin{Bmatrix} Q & R & S \\ \mathsf{U} & \mathsf{U} & \mathsf{U} \end{Bmatrix} \neq 1\,.$$

Wir geben dem Satze noch eine weitere Fassung, die wichtigste von allen:

Zusatz II. *Die projektiven Spiegelungen, die eine gemeinsame Spiegelebene* U *und alle mögliche (ausserhalb* U *gelegenen) Punkte des Raumes zu Spiegelpunkten haben, bilden eine Spiegelschaar, die der Voraussetzung I. des XIII. Abschnittes genügt.*

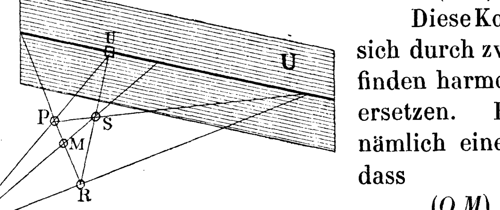
Aus dem Satze 114. folgt noch mit Rücksicht auf die Umkehrung des Satzes 133.:

Zusatz III. *Alle projektiven Schiebungen mit gemeinsamer Spurebene bilden eine Gruppe vertauschbarer zweispiegeliger Verwandtschaften.*

134. Die Gleichung

$$\begin{Bmatrix} R & S \\ \mathsf{U} & \mathsf{U} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q & P \\ \mathsf{U} & \mathsf{U} \end{Bmatrix}$$

lässt bei gegebenen Punkten Q, R, S den vierten Punkt P durch eine projektive Schiebung finden (133, Zusatz I.).



Diese Konstruktion lässt sich durch zweimaliges Auffinden harmonischer Punkte ersetzen. Bestimmt man nämlich einen Punkt M so, dass

$$\begin{Bmatrix} Q & M \\ \mathsf{U} & \mathsf{U} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M & S \\ \mathsf{U} & \mathsf{U} \end{Bmatrix}$$

wird, d. h. so, dass Q und S durch M und die Ebene U harmonisch getrennt werden, so folgt aus dieser und der vorigen Gleichung (nach 119.):

$$\begin{Bmatrix} R & M \\ \mathsf{U} & \mathsf{U} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M & P \\ \mathsf{U} & \mathsf{U} \end{Bmatrix},$$

d. h. P bestimmt sich als viertes harmonisches Element des Punktes R zum Punkte M und der Ebene U.

135. Spiegelt man einen Punkt O an $\begin{Bmatrix} S_1 \\ \mathsf{U} \end{Bmatrix}$ nach S_2, S_1 an $\begin{Bmatrix} S_2 \\ \mathsf{U} \end{Bmatrix}$ nach S_3, u. s. f., schliesslich $S_{\nu-2}$ an $\begin{Bmatrix} S_{\nu-1} \\ \mathsf{U} \end{Bmatrix}$ nach S_ν, so erhält man (132.) die Gleichungen:

$$\begin{Bmatrix} O\,S_1 \\ \mathsf{U}\,\mathsf{U} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_1\,S_2 \\ \mathsf{U}\,\mathsf{U} \end{Bmatrix} = \cdot\cdot = \begin{Bmatrix} S_{\nu-2}\,S_{\nu-1} \\ \mathsf{U}\quad\mathsf{U} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_{\nu-1}\,S_\nu \\ \mathsf{U}\quad\mathsf{U} \end{Bmatrix}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt aber

$$\begin{Bmatrix} O\,S_1 \\ \mathsf{U}\,\mathsf{U} \end{Bmatrix}^\nu = \begin{Bmatrix} O\,S_1 & S_1 S_2 & \cdot\cdot & S_{\nu-2}\,S_{\nu-1} & S_{\nu-1}\,S_\nu \\ \mathsf{U}\,\mathsf{U} & \mathsf{U}\,\mathsf{U} & & \mathsf{U}\quad\mathsf{U} & \mathsf{U}\quad\mathsf{U} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} O\,S_\nu \\ \mathsf{U}\,\mathsf{U} \end{Bmatrix}.$$

Nach der Konstruktion bilden auf der Geraden $O S_1$ die Punkte O, S_1, S_2, $\cdot\cdot$ $S_{\nu-1}$, S_ν eine harmonische Reihe mit demjenigen Punkte U als Grenzpunkt, in welchem die Gerade von der Ebene **U** getroffen wird. Gilt aber umgekehrt die Gleichung

$$\begin{Bmatrix} O\,S_1 \\ \mathsf{U}\,\mathsf{U} \end{Bmatrix}^\nu = \begin{Bmatrix} O\,S_\nu \\ \mathsf{U}\,\mathsf{U} \end{Bmatrix},$$

so muss eine harmonische Reihe von Punkten $O, S_1, S_2, \cdots$ auf der Geraden $O S_1$ existiren, in der der Punkt S_ν als ν^{ter} auf O folgt.

Sind nun die beiden Punkte O und S_ν beliebig ausserhalb der Ebene **U** gegeben, so ist durch den Punkt O als Anfangspunkt, S_ν als $(\nu+1)^{\text{ten}}$ Punkt und durch den Schnittpunkt der Geraden $O S_\nu$ mit **U** als Grenzpunkt eine harmonische Reihe *eindeutig* bestimmt[1]). Und ist in ihr S_1 der erste auf O folgende Punkt, so gilt wieder die obige Gleichung.

Satz. *Sind ausserhalb der Ebene* **U** *zwei beliebige Punkte O und S_ν gegeben, so ist dadurch eindeutig ein Punkt S_1 bestimmt, derart, dass die Spiegelgleichung gilt*

$$\begin{Bmatrix} O\,S_1 \\ \mathsf{U}\,\mathsf{U} \end{Bmatrix}^\nu = \begin{Bmatrix} O\,S_\nu \\ \mathsf{U}\,\mathsf{U} \end{Bmatrix}.$$

1) Die Konstruktion von S_1 bei gegebenen O, S_ν und **U** ist, wie bekannt, ganz entsprechend der ν-Teilung einer Strecke auszuführen: Man ziehe durch O eine beliebige weitere Gerade (ausser $O S_\nu$) und konstruire auf ihr eine beliebige harmonische Reihe mit dem Anfangspunkt O und dem Grenzpunkt in **U**. Ist O, T_1, T_2, .. T_ν diese Reihe, T_ν also der ν^{te} auf O folgende Punkt, so projicire man aus einem Punkte von **U** T_ν nach S_ν, dann projicirt sich T_1 nach S_1 und die ganze harmonische Reihe O, T_1, .. T_ν nach O, S_1, .. S_ν. Aus dieser Konstruktion folgt auch die Eindeutigkeit des Punktes S_1.

Die Vergleichung dieses Satzes mit der Voraussetzung IIa. liefert den

Zusatz. *Die in Nr. 135, Zusatz II, bezeichnete Spiegelschaar genügt auch der Voraussetzung IIa. des XIII. Abschnittes.*

Daraus folgt, dass alle dort aus den Voraussetzungen I. und IIa. abgeleiteten Sätze ohne weiteres auf unsere Spiegelschaar übertragen werden dürfen.

136. Wir könnten die Sätze über die projektiven Schiebungen erster Art noch dual übertragen und würden so zu ihrer Darstellung aus zwei projektiven Spiegelungen mit gemeinsamen Centren kommen. Statt dessen wollen wir diese Darstellung aus der vorigen auf einem Wege ableiten, der noch auf eine Zerlegung in ganz anders geartete Spiegelungen führt.

Betrachten wir die projektive Schiebung

$$\mathfrak{A} = \begin{Bmatrix} R\,S \\ \mathbf{U}\,\mathbf{U} \end{Bmatrix},$$

und legen wir durch die Punkte R und S zwei beliebige Ebenen $\mathbf{R}$ und $\mathbf{S}$, deren Schnittgerade w_2 in $\mathbf{U}$ liegt, so wird, wenn man die Gerade RS mit w_1 bezeichnet, nach 81.

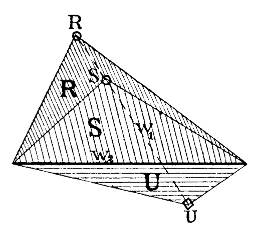
$$\begin{Bmatrix} R \\ \mathbf{U} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U\,w_1 \\ \mathbf{R}\,w_2 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} S \\ \mathbf{U} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_1\,U \\ w_2\,\mathbf{S} \end{Bmatrix},$$

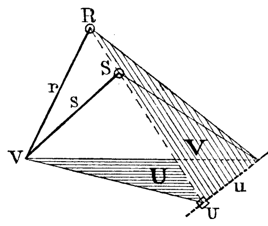
also

$$\begin{Bmatrix} R\,S \\ \mathbf{U}\,\mathbf{U} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U\,w_1\,w_1\,U \\ \mathbf{R}\,w_2\,w_2\,\mathbf{S} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U\,U \\ \mathbf{R}\,\mathbf{S} \end{Bmatrix},$$

oder wenn wir die Buchstaben oben und unten vertauschen,

$$\mathfrak{A} = \begin{Bmatrix} R\,S \\ \mathbf{U}\,\mathbf{U} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}\,\mathbf{S} \\ U\,U \end{Bmatrix}.$$





Legen wir andererseits durch die Punkte R und S zwei beliebige *Geraden* r und s, die sich in der Spurebene $\mathbf{U}$ im Punkte V treffen, und ferner in der Spurebene $\mathbf{U}$ durch das Centrum U eine beliebige Gerade u (die nicht durch V geht), so wird, falls

man die Ebene, die u und R und S enthält, mit **V** bezeichnet, nach 81.

$$\begin{Bmatrix} R \\ \mathbf{U} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r\ V \\ u\ \mathbf{V} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} S \\ \mathbf{U} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V\ s \\ \mathbf{V}\ u \end{Bmatrix},$$

also

$$\begin{Bmatrix} R\ S \\ \mathbf{U}\ \mathbf{U} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r\ V\ V\ s \\ u\ \mathbf{V}\ \mathbf{V}\ u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r\ s \\ u\ u \end{Bmatrix},$$

daher

$$\mathfrak{A} = \begin{Bmatrix} R\ S \\ \mathbf{U}\ \mathbf{U} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}\ \mathbf{S} \\ U\ U \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r\ s \\ u\ u \end{Bmatrix}.$$

Hier sind nicht nur R und S entsprechende Punkte der Schiebung, deren Wiederholung $\mathfrak{A}$ ergiebt, sondern (nach 129.) auch **R** und **S** entsprechende Ebenen und r und s entsprechende Geraden dieser Verwandtschaft. Daraus folgt der

Satz. *Es giebt dreierlei Möglichkeiten, eine projektive Schiebung erster Art als Folge zweier projektiven Spiegelungen darzustellen. Man wähle für beide Spiegelungen ein gemeinsames Spiegelelement, und zwar entweder die Spurebene, oder das Centrum, oder eine Gerade, die in der ersten liegt und durch das zweite geht, und als weitere Elemente beider Spiegelungen im ersten Fall zwei Punkte, im zweiten zwei Ebenen, im dritten zwei Geraden, die einander in derjenigen projektiven Schiebung entsprechen, deren Wiederholung die gegebene Schiebung ergiebt.*

Da man auch von vornherein die Ebenen **R** und **S** und den Punkt U oder die beiden sich schneidenden Geraden r und s und die Gerade u annehmen kann, und dazu die übrigen Elemente hinzufügen, die den Satz ausmachen, so ergiebt sich die

Umkehrung. *Die Folge zweier projektiven Spiegelungen, die ein Spiegelelement gemein haben, und deren beide andere Spiegelelemente, falls sie Geraden sind, sich schneiden, ist eine projektive Schiebung erster Art.*

Ist das gemeinsame Spiegelelement eine Ebene, so ist sie die Spurebene der Schiebung, während die beiden anderen Spiegelelemente Punkte sind, deren Verbindungsgerade die Spurebene im Centrum trifft.

Ist das gemeinsame Spiegelelement ein Punkt, so ist er das Centrum der Schiebung, während die beiden anderen Spiegelelemente Ebenen sind, deren Schnittgerade mit dem Centrum durch die Spurebene verbunden wird.

Und ist das gemeinsame Spiegelelement eine Gerade, so sind die beiden anderen Spiegelelemente zwei sich schneidende Geraden, deren Ebene jene Gerade im Centrum trifft und deren Schnittpunkt mit jener Geraden durch die Spurebene verbunden wird.

137. Die für räumliche Systeme angestellten Betrachtungen gelten in naturgemässer Veränderung auch für *ebene Systeme* und für *Systeme auf der Geraden.* Statt der Spiegelungen an Punkt und Ebene hat man in der *Ebene* die Spiegelung an Punkt und Gerade zu setzen, während die Spiegelung am windschiefen Geradenpaar nichts entsprechendes hat. Ebenso bleibt in der *Geraden* die Spiegelung am Punktepaar für die den vorigen analogen Sätze als einzige Spiegelung übrig.

An Stelle der räumlichen projektiven Schiebung erster Art tritt in der *Ebene* als einzige Schiebung diejenige mit Spurgeraden und in ihr liegendem Centrum, während in der *Geraden* ein Punkt allein als ausgezeichnetes Element der Schiebung vorhanden ist und zugleich als Centrum, wie als Spurpunkt aufzufassen ist.

So gilt in der Geraden z. B. zwischen vier beliebigen Punkten Q, R, S und U die Gleichung

$$\begin{Bmatrix} R\,S\,T \\ U\,U\,U \end{Bmatrix}^2 = 1\,;$$

dies ist aber der in der in der Fussnote 2) Nr. 106a. erwähnte Satz.

B. Projektive Schiebungen zweiter Art.

138. Zu einer allgemeineren (ebenfalls kollinearen) Verwandtschaft gelangen wir, wenn wir, wie in Nr. 136, die Folge zweier Spiegelungen an Geradenpaaren mit einer Geraden als gemeinsamem Spiegelelement betrachten, jedoch ohne die Einschränkung, dass die beiden anderen Geraden sich treffen müssen.

Es seien jetzt also r, s und u drei beliebige Geraden, die nur der Bedingung unterworfen sind, dass u von keiner der beiden anderen getroffen wird. Wir untersuchen dann die zweispiegelige Verwandtschaft

$$\mathfrak{B} = \begin{Bmatrix} r & s \\ u & u \end{Bmatrix}.$$

Legt man durch die Gerade u irgend eine Ebene, welche r und s in den Punkten R und S schneiden möge, so lässt sich die

Spiegelung $\begin{Bmatrix} r \\ u \end{Bmatrix}$ *für die Punkte dieser Ebene* ersetzen durch $\begin{Bmatrix} R \\ u \end{Bmatrix}$ (vgl. Nr. 79. 5) und ebenso $\begin{Bmatrix} s \\ u \end{Bmatrix}$ durch $\begin{Bmatrix} S \\ u \end{Bmatrix}$. Die Verwandtschaft $\begin{Bmatrix} R\, S \\ u\, u \end{Bmatrix}$ ist aber eine projektive Schiebung in dieser Ebene, man hat also den

Satz. *Die kollineare Verwandtschaft* $\mathfrak{B} = \begin{Bmatrix} r\; s \\ u\; u \end{Bmatrix}$ *führt jede durch die Gerade u gehende Ebene vermöge einer ebenen projektiven Schiebung in sich über, deren Spurgerade die Gerade u ist, und deren Centrum U aus u von derjenigen Geraden ausgeschnitten wird, welche die in jener Ebene liegenden Punkte von r und s verbindet.*

Wir nennen eine solche Verwandtschaft $\mathfrak{B}$ eine *projektive Schiebung zweiter Art*[1]). Die Gerade u heisst ihre *Spurgerade.*

Diese Verwandtschaft bewirkt, dass jeder durch u gehenden Ebene ein bestimmter Punkt U der Spurgeraden als Centrum beigegeben ist, und umgekehrt, dass jedem Punkte U der Geraden u eine durch u gehende Ebene beigegeben ist, welche nämlich diejenige durch U gehende Gerade enthält, welche die Geraden r und s trifft. Es findet sich demnach in jeder solchen Ebene ein Strahlbüschel, dessen Centrum U in u liegt, und von dessen Strahlen ein jeder durch die Verwandtschaft $\mathfrak{B}$ in sich nach dem Centrum (Spurpunkt) U hin geschoben wird.

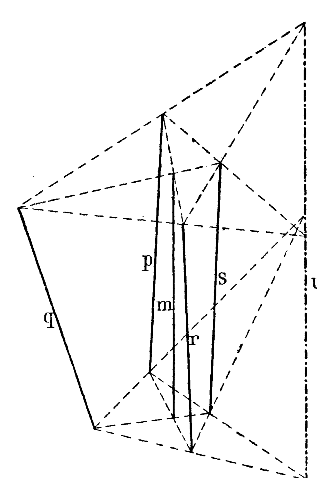
139. Ist nun q irgend eine weitere Gerade, die von der Geraden u nicht getroffen wird, so giebt es eine und nur eine Gerade m derart, dass die Gerade s an $\begin{Bmatrix} m \\ u \end{Bmatrix}$ in q gespiegelt wird. Denn legt man durch u zwei Ebenen, die q und s in den Punkten Q_1 und S_1, und in Q_2 und S_2 treffen, so giebt es in jeder dieser Ebenen einen Punkt, M_1 in der einen, M_2 in der anderen, derart, dass in dem ebenen Systeme die Gleichungen gelten

$$\begin{Bmatrix} Q_1\, M_1 \\ u\;\; u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_1\, S_1 \\ u\;\; u \end{Bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{Bmatrix} Q_2\, M_2 \\ u\;\; u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_2\, S_2 \\ u\;\; u \end{Bmatrix}.$$

1) Die Erweiterung dieser Sätze auf Räume höherer Dimension, in denen entsprechend der vergrösserten Anzahl projektiver Spiegelungen auch mehr Arten von projektiven Schiebungen auftreten, unterliegt keiner Schwierigkeit. Man könnte in unserem Raum zwischen (1, 3)-Schiebungen und (2, 2)-Schiebungen unterscheiden. Ebenso im Raume ν^{ter} Stufe zwischen $(1,\ \nu-1)$-, $(2,\ \nu-2)$-, $(3,\ \nu-3)$-Schiebungen u. s. w.



Ist dann m die Gerade, die die beiden Punkte M_1 und M_2 verbindet, so werden (nach 79. 5) die Punkte Q_1 und Q_2 am Geradenpaar $\begin{Bmatrix} m \\ u \end{Bmatrix}$ in S_1 und S_2, also (da die Spiegelung eine kollineare Abbildung ist) die Gerade q in die Gerade s gespiegelt. Es gilt daher (Satz in 131.) die Gleichung



$$1)\qquad \begin{Bmatrix} q & m \\ u & u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m & s \\ u & u \end{Bmatrix}.$$

Spiegelt man die Gerade r an $\begin{Bmatrix} m \\ u \end{Bmatrix}$ nach p, so wird ebenso

$$2)\qquad \begin{Bmatrix} r & m \\ u & u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m & p \\ u & u \end{Bmatrix}.$$

Werden nun die vier Geraden p, q, r, s und die Gerade m von einer beliebigen durch u gehenden Ebene in den Punkten P, Q, R, S geschnitten, so gelten (nach 79. 5) in dieser Ebene die Gleichungen:

$$\begin{Bmatrix} P & M \\ u & u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M & R \\ u & u \end{Bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{Bmatrix} S & M \\ u & u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M & Q \\ u & u \end{Bmatrix}$$

und aus ihnen folgt nach Nr. 134. mit Rücksicht auf Nr. 137. die Gleichung

$$\begin{Bmatrix} Q & P \\ u & u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R & S \\ u & u \end{Bmatrix}.$$

Statt einen Punkt dieser Ebene an der Folge $\begin{Bmatrix} Q & P \\ u & u \end{Bmatrix}$ oder an der Folge $\begin{Bmatrix} R & S \\ u & u \end{Bmatrix}$ zu spiegeln, kann man ihn (wegen 79.5) an den Folgen von Geradenpaaren $\begin{Bmatrix} q & p \\ u & u \end{Bmatrix}$ und $\begin{Bmatrix} r & s \\ u & u \end{Bmatrix}$ spiegeln und beide Folgen ergeben wegen der letzten Gleichung dieselbe Endlage des Punktes. Da aber jeder Punkt in einer solchen Ebene liegt, so wird jeder Punkt des Raumes durch die Folge $\begin{Bmatrix} q & p \\ u & u \end{Bmatrix}$ in die-

selbe Endlage übergeführt, wie durch die Folge $\begin{Bmatrix} r & s \\ u & u \end{Bmatrix}$, d. h. es gilt allgemein die Gleichung

$$\begin{Bmatrix} q & p \\ u & u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r & s \\ u & u \end{Bmatrix}.$$

Wir haben hierin die Gerade p durch zwei Spiegelungen je einer Geraden an einem Geradenpaar erhalten [Gleichungen 1) und 2)], und können daher den Satz aussprechen:

Satz. *Sind vier beliebige Geraden q, r, s und u gegeben, so dass die letzte von keiner der drei anderen geschnitten wird, und bestimmt man aus q, s und u eine Gerade m und aus r, m und u eine Gerade p, so dass sie den Gleichungen genügen*

$$\begin{Bmatrix} q & m \\ u & u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m & s \\ u & u \end{Bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{Bmatrix} r & m \\ u & u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m & p \\ u & u \end{Bmatrix},$$

so gilt zwischen den Geraden p, q, r, s und u die Gleichung

$$\begin{Bmatrix} q & p \\ u & u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r & s \\ u & u \end{Bmatrix}.$$

Zusatz I. *Sind eine Gerade u und drei beliebige Geraden q, r, s, die die erste nicht schneiden, gegeben, so ist dadurch eindeutig eine Gerade p so bestimmt, dass wird:*

$$\begin{Bmatrix} q & p \\ u & u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r & s \\ u & u \end{Bmatrix}.$$

Oder:

Zusatz II. *Die projektiven Spiegelungen, die eine Gerade u als gemeinsames Spiegelelement und alle möglichen (u nicht schneidenden) Geraden als zweite Spiegelelemente haben, bilden eine Spiegelschaar, die der Voraussetzung I. des XIII. Abschnittes genügt.*

Zusatz III. *Die projektiven Schiebungen zweiter Art, die eine Gerade u als gemeinsames Spiegelelement haben, bilden eine Gruppe vertauschbarer zweispiegeliger Verwandtschaften.*

In diese Gruppe eingerechnet sind auch solche Verwandtschaften, bei denen sich die beiden Geraden r und s treffen, d. h. projektive Schiebungen erster Art, deren Centrum auf der Geraden u liegt, während ihre Spurebene durch sie hindurchgeht (vgl. Nr. 136.).



140. Da nach dem Beweisgange der vorigen Nummer Gleichungen, die für die Punkte zweier durch die Geraden gelegten Ebenen entsprechend gelten, sich zu einer Gleichung zwischen den Verbindungsgeraden jener Punkte verknüpfen lassen, so folgt, dass auf demselben Wege, den wir in der vorigen Nummer eingeschlagen haben, auch die übrigen für projektive Schiebungen der zwei Ebenen geltenden Sätze sich auf die Verbindungsgeraden übertragen lassen.

So erhalten wir noch die folgenden Ergebnisse.

Satz. *Sind zwei beliebige Geraden o und s_ν gegeben, die eine dritte Gerade u nicht treffen, so ist dadurch eindeutig eine Gerade s_1 bestimmt, derart dass die Gleichung gilt:*

$$\begin{Bmatrix} o & s_1 \\ u & u \end{Bmatrix}^\nu = \begin{Bmatrix} o & s_\nu \\ u & u \end{Bmatrix}.$$

Zusatz. *Die im vorigen (Nr. 139, Zusatz II.) bezeichnete Spiegelschaar genügt auch der Voraussetzung IIa. des XIII. Abschnittes.*

141. Bestimmt man die Gerade t so, dass die Gleichung besteht:

$$\mathfrak{B} = \begin{Bmatrix} r & s \\ u & u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} s & t \\ u & u \end{Bmatrix},$$

so wird die Gerade r durch $\begin{Bmatrix} r \\ u \end{Bmatrix}$ in sich gespiegelt, durch $\begin{Bmatrix} s \\ u \end{Bmatrix}$ aber in Folge dieser Gleichung in t (132.); d. h. der Geraden r entspricht in der Verwandtschaft $\mathfrak{B}$ die Gerade t.

Daraus folgt jetzt aber, *dass eine Verwandtschaft* $\mathfrak{B}$ *durch die Spurgerade u und ein Paar entsprechender Geraden, die u nicht treffen, eindeutig bestimmt ist.* Denn sind r und t diese Geraden und wird u an $\begin{Bmatrix} r \\ t \end{Bmatrix}$ nach s' gespiegelt, so gilt die Gleichung

$$\begin{Bmatrix} r & s' \\ u & u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} s' & t \\ u & u \end{Bmatrix};$$

stellt man aber die Verwandtschaft $\mathfrak{B}$ so dar, dass r als erste Spiegelgerade gewählt, s als zweite dazu bestimmt wird, so muss die Gerade r, da sie durch die Verwandtschaft $\mathfrak{B}$ in t übergeführt werden soll und an $\begin{Bmatrix} r \\ u \end{Bmatrix}$ in sich gespiegelt wird

an $\begin{Bmatrix} s \\ u \end{Bmatrix}$ in t gespiegelt werden, oder was dasselbe heisst es muss u an $\begin{Bmatrix} r \\ t \end{Bmatrix}$ in s gespiegelt werden, d. h. s mit s' identisch sein.

Dann folgt aber wiederum, dass die Wiederholung derjenigen projektiven Schiebung zweiter Art, die der Geraden r die Gerade s zuordnet, die Verwandtschaft $\mathfrak{B}$ ergiebt, d. h.:

Satz. *Die Verwandtschaft* $\begin{Bmatrix} r & s \\ u & u \end{Bmatrix}$ *entsteht durch Wiederholung derjenigen projektiven Schiebung zweiter Art, welche u zur Spurgeraden hat, und der Geraden r die Gerade s zuordnet.*

Und die

Umkehrung. *Jede projektive Schiebung zweiter Art mit der Spurgeraden u, welche einer Geraden a_1 eine Gerade a_2 zuordnet, lässt sich in zwei projektive Spiegelungen zerlegen, die die Spurgerade zum gemeinsamen Spiegelelement haben.*

Von den beiden anderen Spiegelelementen r und s kann für das eine jede beliebige (u nicht schneidende) Gerade des Raumes gewählt werden, während das andere so bestimmt werden muss, dass der Geraden r die Gerade s in derjenigen projektiven Schiebung entspricht, deren Wiederholung die gegebene ergiebt.

Polare Gebilde.

142. Durch den Nachweis, dass unsere Schaaren von Spiegelungen, die ein gemeinsames Spiegelelement besitzen, den Bedingungen I. und Ia. genügen, ist sofort die Anwendbarkeit aller Sätze, die aus diesen beiden Bedingungen gefolgert worden sind, auf diese Schaaren bewiesen. Insbesondere nehmen jetzt die Sätze der Nr. 120. die folgende Form an:

Nimmt man im Raume eine beliebige Ebene $\mathbf{U}$ oder einen beliebigen Punkt U oder eine beliebige Gerade u an, und ausserdem eine Gruppe von ν Punkten $P_1, .. P_\nu$, die nicht in $\mathbf{U}$ liegen, oder eine Gruppe von ν Ebenen $\mathbf{P}_1, .. \mathbf{P}_\nu$, die nicht durch U gehen, oder eine Gruppe von ν Graden $p_1, .. p_\nu$, die nicht u schneiden, so ist dadurch eindeutig ein Punkt M, oder eine Ebene $\mathbf{M}$ oder eine Gerade m bestimmt, derart dass die Gleichungen gelten:

$$\left\{\begin{matrix} M\,P_1 & M\,P_2 & \dots & M\,P_\nu \\ \mathbf{U}\;\mathbf{U} & \mathbf{U}\;\mathbf{U} & & \mathbf{U}\;\mathbf{U} \end{matrix}\right\} = 1, \qquad \text{oder}$$

$$\left\{\begin{matrix} \mathbf{M}\,\mathbf{P}_1 & \mathbf{M}\,\mathbf{P}_2 & \dots & \mathbf{M}\,\mathbf{P}_\nu \\ U\;U & U\;U & & U\;U \end{matrix}\right\} = 1, \qquad \text{oder}$$

$$\left\{\begin{matrix} m\,p_1 & m\,p_2 & \dots & m\,p_\nu \\ u\;\;u & u\;\;u & \dots & u\;\;u \end{matrix}\right\} = 1.$$

Wählt man überdies einen beliebigen Punkt O, oder eine beliebige Ebene $\mathbf{O}$, *oder eine beliebige Gerade o, so gelten die Gleichungen:*

$$\left\{\begin{matrix} O\,P_1 & O\,P_2 & \dots & O\,P_\nu \\ \mathbf{U}\;\mathbf{U} & \mathbf{U}\;\mathbf{U} & & \mathbf{U}\;\mathbf{U} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} O\,M \\ \mathbf{U}\,\mathbf{U} \end{matrix}\right\}^\nu,$$

$$\left\{\begin{matrix} \mathbf{O}\,\mathbf{P}_1 & \mathbf{O}\,\mathbf{P}_2 & \dots & \mathbf{O}\,\mathbf{P}_\nu \\ U\;U & U\;U & & U\;U \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \mathbf{O}\,\mathbf{M} \\ U\,U \end{matrix}\right\}^\nu,$$

$$\left\{\begin{matrix} o\;p_1 & o\;p_2 & & o\;p_\nu \\ u\;\;u & u\;\;u & & u\;\;u \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} o\;\;m \\ u\;\;u \end{matrix}\right\}^\nu.$$

Gelten umgekehrt diese Gleichungen für irgend ein Element O, $\mathbf{O}$, o, so gelten sie für jedes andere Element O', $\mathbf{O}'$, o' ebenfalls, und es gelten auch die ersten Gleichungen. Daraus ergiebt sich wegen der Willkürlichkeit für das Element O, $\mathbf{O}$, o eine Menge von speciellen Verfahren, um die Elemente M, $\mathbf{M}$, m zu finden, wie sie analog beim Aufsuchen des Schwerpunktes zu einem System von Punkten verwendet werden.

Der Punkt M heisst der *Pol der Ebene* $\mathbf{U}$, die Ebene $\mathbf{M}$ *die Polare des Punktes* $\mathbf{U}$ in Bezug auf jene Punkt- und Ebenen-Gruppe, und ebenso können wir die Gerade m die *polare Axe der Geraden u* zu jener Gruppe von Geraden nennen. Dann folgt der

Satz. *Dreht sich eine Ebene um eine Gerade u und man sucht in jeder ihrer Lagen den Pol der Geraden u in Bezug auf die ν Schnittpunkte der Ebene mit ν festen Geraden des Raumes, so liegen diese Pole sämmtliche auf einer Geraden, nämlich der polaren Axe der Geraden u in Bezug auf die ν festen Geraden.*

C. Schraubungen um ein und dieselbe Axe.

143. **Satz.** *Die Umwendungen um alle Geraden, die ein und dieselbe Gerade a senkrecht treffen, bilden eine Spiegelschaar, die der Bedingung 1. genügt.*

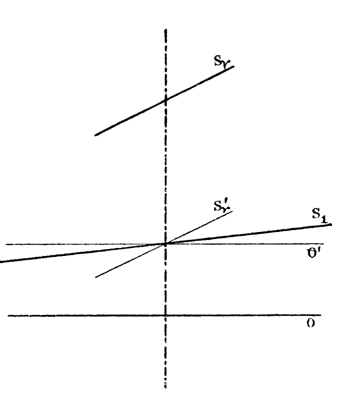
Dies ist nur ein anderer Ausdruck der in Nr. 10. bewiesenen Sätze. Da die Folge zweier solchen Umwendungen eine Schraubung um die Axe a ist (10, Satz), so ergiebt sich (nach 114.) der

Zusatz. *Die Gesammtheit der Schraubungen um ein und dieselbe Axe a bildet eine Gruppe zweispiegeliger vertauschbarer Verwandtschaften.*

144. Um das Verhalten unserer Spiegelschaar zu der Voraussetzung II. zu prüfen, haben wir die *ν-Teilung einer Schraubung* zu untersuchen; d. h. sind o und s_ν irgend zwei Geraden der Schaar, so ist eine Gerade s_1 so zu finden, dass die Gleichung gilt

II. $$\{o\, s_\nu\} = \{o\, s_1\}^\nu$$ oder

$$\{o\, s_1\} = \{s_1\, s_2\} = \cdot\cdot = \{s_{\nu-2}\, s_{\nu-1}\} = \{s_{\nu-1}\, s_\nu\}.$$



Ist s_ν zu o parallel, also $\{o\, s_\nu\}$ eine Schiebung, so ist diejenige Gerade, welche zu beiden parallel ist und das zwischen ihnen gelegene Stück der Axe von o aus gerechnet ν-teilt, eine Lösung für s_1. Ist aber s_ν nicht parallel zu o, ein anderes Gemeinlot als a zwischen ihnen also nicht möglich, so muss jede Gerade, die o und s_1 senkrecht trifft, in Folge der letzten Gleichungen auch s_2, und dann auch s_3 u. s. w., endlich s_ν senkrecht treffen, d. h. das Gemeinlot a von o und s_ν ist auch das einzig mögliche Gemeinlot von o und s_1, daher gehört s_1 zu der Geradenschaar.

Ist überhaupt eine Gerade s_1 als Lösung denkbar, so hängt die Ein- oder Mehrdeutigkeit von dem Bestehen einer Gleichung ab (vergl. 125.)

$$\{s_1\, s_1'\}^\nu = 1$$

oder:

$$\{s_1\, s_1'\} = \{s_1'\, s_1''\} = \cdot\cdot = \{s_1^{(\nu-2)}\, s_1^{(\nu-1)}\} = \{s_1^{(\nu-1)}\, s_1\}.$$

Eine Schraubung oder Schiebung kann bei keiner Wiederholung die Identität ergeben, es kann daher $\{s_1\, s_1'\}$ nur eine Drehung sein, d. h. s_1 und s_1' müssen sich treffen. Wir sind daher auf die bekannte Aufgabe geführt, eine volle Umdrehung

Fünfte Abhandlung (7. 12. 1891.).

Ueber die aus zwei Spiegelung en zusammengesetzten Verwandtschaften. Nr. 86—106.

Sechste Abhandlung (31. 7. 1893.).

Ueber Gruppen vertauschbarer zweispiegeliger Verwandtschaften. Nr. 107—147.
